《不等关系与不等式》学程拓展参考答案

1.**解析**　设 $f(-2)=mf(-1)+nf(1)$(m,n 为待定系数),则 $4a-2b=m(a-b)+n(a+b)$,

即 $4a-2b=(m+n)a+(n-m)b$.

于是得 $\begin{cases}m+n=4,\\n-m=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3,\\n=1.\end{cases}$

$\therefore f(-2)=3f(-1)+f(1)$.

又 $\because 1\leqslant f(-1)\leqslant 2, 2\leqslant f(1)\leqslant 4$.

$\therefore 5\leqslant 3f(-1)+f(1)\leqslant 10$,故 $5\leqslant f(-2)\leqslant 10$.

答案　[5,10]

2. **解析**　因为 $f(1)=0$,所以 $a+b+c=0$,

所以 $b=-(a+c)$.又 $a>b>c$,

所以 $a>-(a+c)>c$,且 $a>0,c<0$,

所以 $1>-\frac{a+c}{a}>\frac{c}{a}$,即 $1>-1-\frac{c}{a}>\frac{c}{a}$.

所以 $\begin{cases}\frac{2c}{a}<-1,\\ \frac{c}{a}>-2,\end{cases}$ 解得 $-2<\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$.

即 $\frac{c}{a}$ 的取值范围为 $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$

3. **解析** 由题意知 $a>1$，$0<b<1$，所以 $\frac{b}{2^a}<1$，$\log_2(a+b)>\log_2 2\sqrt{ab}=1$，

$2^{a+\frac{1}{b}}>a+\frac{1}{b}>a+b\Rightarrow a+\frac{1}{b}>\log_2(a+b)$.故选 B.

评注　本题也可采用特殊值法，如 $a=3,b=\frac{1}{3}$，易得结论.

4.**解析**　因为 $-1<x<4,2<y<3$,所以 $-3<-y<-2$,所以 $-4<x-y<2$.由 $-1<x<4,2<y<3$,得 $-3<3x<12,4<2y<6$,所以 $1<3x+2y<18$.

答案　$(-4,2)$　$(1,18)$

【迁移探究 1】解析　因为 $-1<x<3,-1<y<3$,

所以 $-3<-y<1,-4<x-y<4$.①

又因为 $x<y$,所以 $x-y<0$,②

由①②得$-4<x-y<0$,

故 $x-y$ 的取值范围是$(-4,0)$.

【迁移探究 2】解析　设 $3x+2y=\lambda(x-y)+\mu(x+y)$,

即 $3x+2y=(\lambda+\mu)x+(\mu-\lambda)y$,

于是$\begin{cases}\lambda+\mu=3,\\ \mu-\lambda=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{2},\\ \mu=\dfrac{5}{2},\end{cases}$

$\therefore 3x+2y=\frac{1}{2}(x-y)+\frac{5}{2}(x+y)$.

$\because -1<x-y<4,2<x+y<3$,

$\therefore -\frac{1}{2}<\frac{1}{2}(x-y)<2,5<\frac{5}{2}(x+y)<\frac{15}{2}$,

$\therefore \frac{9}{2}<\frac{1}{2}(x-y)+\frac{5}{2}(x+y)<\frac{19}{2}$.

故 $3x+2y$ 的取值范围是$\left(\frac{9}{2},\ \frac{19}{2}\right)$.