从函数的观点看一元二次方程和一元二次不等式

目标与建议

【使用说明】

从数学结合的思想方法，理解二次函数的图形和性质、一元二次方程的根、解一元二次不等式之间的关系，重点探究三个“二次”之间的联系，在理解一元二次不等式与二次函数关系的基础上，掌握图象法解一元二次不等式的方法，从而抽象出一元二次不等式的一般解法。

【学法指导】

从函数观点看一元二次方程、一元二次不等式，结合二次函数的图象，判断一元二次方程实根的存在性及根的个数。借助二次函数解一元二次不等式，用集合表示一元二次不等式的解集，借助二次函数的图象，探究一元二次不等式与相应函数、方程的联系。

【主要方法】

1、 数学抽象：一元二次不等式的定义及解法。
2、 逻辑推理：理解三个“二次”的关系。
3、 数学运算：按照步骤解决一元二次不等式
4、 直观想象：运用二次函数图像解一元二次不等式。

【学习目标】

1、 通过二次函数图像和性质的研究，理解二次函数与一元二次方程、一元二次不等式之间的联系，掌握图像法解一元二次不等式的方法。

2、通过研究三个“二次”的关系，获得一元二次不等式的解法.

3. 渗透数形结合思想，培养学生数学思维能力

【学习重点】

重点：1.研究三个“二次”的关系，利用二次函数图像理解一元二次方程的实数根和一元二次　不等式的解集;2.解一元二次不等式。

【学习难点】

难点：解含参的一元二次不等式.

【学习内容】

三个“二次”即二次函数、一元二次方程、一元二次不等式是高中数学的重要内容，具有丰富的内涵和密切的联系，运用数形结合的思想，理解三者之间的区别及联系，掌握函数、方程及不等式的思想和方法. 将一元二次不等式的求解与二次函数以及一元二次方程联系起来，解决求一元二次不等式的一般方法。

知识与方法梳理

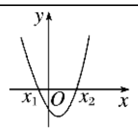
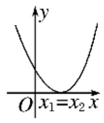
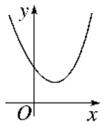
一元二次不等式的概念

定义	只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的不等式，叫做一元二次不等式
一般形式	ax²＋bx＋c>0，ax²＋bx＋c<0，ax²＋bx＋c⩾0，ax²＋bx＋c⩽0，其中 a≠0，a，b，c 均为常数

一元二次函数的零点

一般地，对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，我们把使 $ax^2+bx+c=0$ 的实数 x 叫做二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点.

二次函数与一元二次方程的根、一元二次不等式解集的对应关系

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$的根	有两个不相等的实数根 x_1，$x_2(x_1<x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0(a>0)$的解集	$\{x\|x<x_1$，或 $x>x_2\}$	$\left\{x \middle\| x\neq-\frac{b}{2a}\right\}$	**R**
$ax^2+bx+c<0(a>0)$的解集	$\{x\|x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

华罗庚教授说过：数缺形时少直观，形少数时难入微，数形结合百般好，隔离分家万事非

解一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$、$ax^2+bx+c<0$ ($a>0$)的步骤：

(1)二次项的系数变为正 ($a>0$)

(2) 看能否因式分解，不能分解的计算△，

(3) 求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实根;（画出函数图像）

(4)（结合函数图象）写出不等式的解集.

【微点提醒】

1.解不等式 $ax^2+bx+c>0(<0)$时不要忘记当 $a=0$ 时的情形.

2.不等式 $ax^2+bx+c>0(<0)$恒成立的条件要结合其对应的函数图象决定.

(1)不等式 $ax^2+bx+c>0$ 对任意实数 x 恒成立⇔$\begin{cases}a=b=0,\\c>0\end{cases}$ 或$\begin{cases}a>0,\\\Delta<0.\end{cases}$

(2)不等式 $ax^2+bx+c<0$ 对任意实数 x 恒成立⇔$\begin{cases}a=b=0,\\c<0\end{cases}$ 或$\begin{cases}a<0,\\\Delta<0.\end{cases}$

【思考辨析】

判断下面结论是否正确(请在括号中打“√”或“×”)

(1)若不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为$(x_1，x_2)$，则必有 $a>0$.(　√　)

(2)不等式$\frac{x-2}{x+1}\leqslant 0$ 的解集是$[-1,2]$.（　×　)

(3)若不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是$(-\infty，x_1)\cup(x_2，+\infty)$，则方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根是 x_1 和 x_2.(　√　)

(4)若方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$没有实数根，则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$.(　×　)

课堂探究

题型一　一元二次不等式的求解

探究一、　不含参的不等式

例 1　求不等式$-2x^2+x+3<0$ 的解集.

解　化$-2x^2+x+3<0$ 为 $2x^2-x-3>0$，

解方程 $2x^2-x-3=0$ 得 $x_1=-1$，$x_2=\frac{3}{2}$,

∴不等式 $2x^2-x-3>0$ 的解集为$(-\infty，-1)\cup(\frac{3}{2}，+\infty)$，

即原不等式的解集为$(-\infty，-1)\cup(\frac{3}{2}，+\infty)$.

探究二、　含参不等式

例 2　解关于 x 的不等式：$x^2-(a+1)x+a<0$.

解　由 $x^2-(a+1)x+a=0$ 得$(x-a)(x-1)=0$，

∴$x_1=a$，$x_2=1$，

①当 $a>1$ 时，$x^2-(a+1)x+a<0$ 的解集为$\{x|1<x<a\}$，

②当 $a=1$ 时，$x^2-(a+1)x+a<0$ 的解集为$\varnothing$，

③当 $a<1$ 时，$x^2-(a+1)x+a<0$ 的解集为$\{x|a<x<1\}$.

引申探究

将原不等式改为 $ax^2-(a+1)x+1<0$，求不等式的解集.

解　若 $a=0$，原不等式等价于$-x+1<0$，解得 $x>1$.

若 $a<0$，原不等式等价于$(x-\frac{1}{a})(x-1)>0$，

解得 $x<\frac{1}{a}$或 $x>1$.

若 $a>0$，原不等式等价于$(x-\frac{1}{a})(x-1)<0$.

①当 $a=1$ 时，$\frac{1}{a}=1$，$(x-\frac{1}{a})(x-1)<0$ 无解；

②当 $a>1$ 时，$\frac{1}{a}<1$，解$(x-\frac{1}{a})(x-1)<0$ 得$\frac{1}{a}<x<1$；

③当 $0<a<1$ 时，$\frac{1}{a}>1$，解$(x-\frac{1}{a})(x-1)<0$ 得 $1<x<\frac{1}{a}$.

综上所述：当 $a<0$ 时，解集为$\{x|x<\frac{1}{a}$或 $x>1\}$；

当 $a=0$ 时，解集为$\{x|x>1\}$；当 $0<a<1$ 时，解集为$\{x|1<x<\frac{1}{a}\}$；当 $a=1$ 时，解集为$\varnothing$；当 $a>1$ 时，解集为$\{x|\frac{1}{a}<x<1\}$.

思维升华　含有参数的不等式的求解，往往需要对参数进行分类讨论.

(1)若二次项系数为常数，首先确定二次项系数是否为正数，再考虑分解因式，对参数进行分类讨论，若不易分解因式，则可依据判别式符号进行分类讨论；

(2)若二次项系数为参数，则应先考虑二次项系数是否为零，确定不等式是不是二次不等式，然后再讨论二次项系数不为零的情形，以便确定解集的形式；

(3)对方程的根进行讨论，比较大小，以便写出解集.

变式迁移：求不等式 $12x^2-ax>a^2(a\in\mathbf{R})$的解集.

解　$\because 12x^2-ax>a^2$，$\therefore 12x^2-ax-a^2>0$，

即$(4x+a)(3x-a)>0$，令$(4x+a)(3x-a)=0$，

得：$x_1=-\frac{a}{4}$，$x_2=\frac{a}{3}$.

①$a>0$ 时，$-\frac{a}{4}<\frac{a}{3}$，解集为$\left\{x|x<-\frac{a}{4}或x>\frac{a}{3}\right\}$；

②$a=0$ 时，$x^2>0$，解集为$\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0\}$；

③$a<0$ 时，$-\frac{a}{4}>\frac{a}{3}$，解集为$\left\{x|x<\frac{a}{3}或x>-\frac{a}{4}\right\}$.

综上所述，当 $a>0$ 时，不等式的解集为

$\left\{x|x<-\frac{a}{4}或x>\frac{a}{3}\right\}$；

当 $a=0$ 时，不等式的解集为$\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0\}$；

当 $a<0$ 时，不等式的解集为$\left\{x|x<\frac{a}{3}或x>-\frac{a}{4}\right\}$.

自学检测

1．(教材改编)不等式 $x^2-3x-10>0$ 的解集是(　　)

A．$(-2,5)$　　　　B．$(5，+\infty)$

C．$(-\infty，-2)$　　D．$(-\infty，-2)\cup(5，+\infty)$

答案　D

解析　解方程 $x^2-3x-10=0$ 得 $x_1=-2$，$x_2=5$，

由 $y=x^2-3x-10$ 的开口向上，所以 $x^2-3x-10>0$ 的解集为$(-\infty，-2)\cup(5，+\infty)$.

2．设集合 $M=\{x|x^2-3x-4<0\}$，$N=\{x|0\leqslant x\leqslant 5\}$，则 $M\cap N$ 等于(　　)

A．$(0,4]$　　B．$[0,4)$

C．$[-1,0)$　　D．$(-1,0]$

答案　B

解析　$\because M=\{x|x^2-3x-4<0\}=\{x|-1<x<4\}$，

$\therefore M\cap N=[0,4)$.

3．已知不等式 $ax^2-bx-1\geqslant 0$ 的解集是$\left[-\frac{1}{2}，-\frac{1}{3}\right]$，则不等式 $x^2-bx-a<0$ 的解集是(　　)

A．$(2,3)$　　B．$(-\infty，2)\cup(3，+\infty)$

C.$\left(\frac{1}{3}，\frac{1}{2}\right)$　　D.$\left(-\infty，\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2}，+\infty\right)$

答案　A

解析　由题意知$-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{3}$是方程 $ax^2-bx-1=0$ 的根，所以由根与系数的关系得$-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{b}{a}$，$-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{a}$.解得 $a=-6$，$b=5$，不等式 $x^2-bx-a<0$ 即为 $x^2-5x+6<0$，解集为$(2,3)$.

4.(教材改编)若关于 x 的不等式 $m(x-1)>x^2-x$ 的解集为$\{x|1<x<2\}$,则实数 m 的值为________.

答案　2

解析　因为 $m(x-1)>x^2-x$ 的解集为$\{x|1<x<2\}$.

所以 1,2 一定是 $m(x-1)=x^2-x$ 的解，$\therefore m=2$.

5．(教材改编)若关于 x 的方程 $x^2+ax+a^2-1=0$ 有一正根和一负根，则 a 的取值范围为________.

答案　$(-1,1)$

解析　由题意可知，$\Delta>0$ 且 $x_1x_2=a^2-1<0$，

故$-1<a<1$.