从函数的观点看一元二次方程和一元二次不等式

目标与建议

**【使用说明】**

从数学结合的思想方法，理解二次函数的图形和性质、一元二次方程的根、解一元二次不等式之间的关系，重点探究三个“二次”之间的联系，在理解一元二次不等式与二次函数关系的基础上**，**掌握图象法解一元二次不等式的方法，从而抽象出一元二次不等式的一般解法。

**【学法指导】**

从函数观点看一元二次方程、一元二次不等式，结合二次函数的图象，判断一元二次方程实根的存在性及根的个数。借助二次函数解一元二次不等式，用集合表示一元二次不等式的解集，借助二次函数的图象，探究一元二次不等式与相应函数、方程的联系。

**【主要方法】**

1. 数学抽象：一元二次不等式的定义及解法。
2. 逻辑推理：理解三个“二次”的关系。
3. 数学运算：按照步骤解决一元二次不等式
4. 直观想象：运用二次函数图像解一元二次不等式。

**【学习目标】**

1、 通过二次函数图像和性质的研究，理解二次函数与一元二次方程、一元二次不等式之间的联系，掌握图像法解一元二次不等式的方法。

2、通过研究三个“二次”的关系，获得一元二次不等式的解法．

3. 渗透数形结合思想，培养学生数学思维能力

**【学习重点】**

重点：1.研究三个“二次”的关系，利用二次函数图像理解一元二次方程的实数根和一元二次 不等式的解集;2.解一元二次不等式。

**【学习难点】**

难点：解含参的一元二次不等式．

**【学习内容】**

三个“二次”即二次函数、一元二次方程、一元二次不等式是高中数学的重要内容，具有丰富的内涵和密切的联系，运用数形结合的思想，理解三者之间的区别及联系，掌握函数、方程及不等式的思想和方法. 将一元二次不等式的求解与二次函数以及一元二次方程联系起来，解决求一元二次不等式的一般方法。

**知识与方法梳理**

一元二次不等式的概念

|  |  |
| --- | --- |
| 定义 | 只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是2的不等式，叫做一元二次不等式 |
| 一般形式 | ax2＋bx＋c>0，ax2＋bx＋c<0，ax2＋bx＋c≥0，ax2＋bx＋c≤0，其中a≠0，a，b，c均为常数 |

一元二次函数的零点

一般地，对于二次函数*y*＝*ax*2＋*bx*＋*c*，我们把使*ax*2＋*bx*＋*c*＝0的实数*x*叫做二次函数*y*＝*ax*2＋*bx*＋*c*的零点．

二次函数与一元二次方程的根、一元二次不等式解集的对应关系

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 判别式*Δ*＝*b*2－4*ac* | *Δ*>0 | *Δ*＝0 | *Δ*<0 |
| 二次函数*y*＝*ax*2＋*bx*＋*c*(*a*>0)的图象 |  |  |  |
| 一元二次方程*ax*2＋*bx*＋*c*＝0(*a*>0)的根 | 有两个不相等的实数根*x*1，*x*2(*x*1<*x*2) | 有两个相等的实数根*x*1＝*x*2＝－ | 没有实数根 |
| *ax*2＋*bx*＋*c*>0(*a*>0)的解集 | {*x*|*x*<*x*1，或*x*>*x*2} |  | **R** |
| *ax*2＋*bx*＋*c*<0(*a*>0)的解集 | {*x*|*x*1<*x*<*x*2} | ∅ | ∅ |

华罗庚教授说过：数缺形时少直观，形少数时难入微，数形结合百般好，隔离分家万事非

**解一元二次不等式*ax2+bx+c>*0*、ax2+bx+c<*0 (*a*>0)的步骤：**

**(1)二次项的系数变为正 (*a>*0)**

(2) 看能否因式分解，不能分解的计算△，

**(3) 求出方程*ax*2*+bx+c=0* 的实根;（画出函数图像）**

**(4)（结合函数图象）写出不等式的解集.**

【微点提醒】

1.解不等式*ax*2＋*bx*＋*c*>0(<0)时不要忘记当*a*＝0时的情形.

2.不等式*ax*2＋*bx*＋*c*>0(<0)恒成立的条件要结合其对应的函数图象决定.

(1)不等式*ax*2＋*bx*＋*c*>0对任意实数*x*恒成立⇔或

(2)不等式*ax*2＋*bx*＋*c*<0对任意实数*x*恒成立⇔或

【思考辨析】

判断下面结论是否正确(请在括号中打“√”或“×”)

(1)若不等式*ax*2＋*bx*＋*c*<0的解集为(*x*1，*x*2)，则必有*a*>0.(　√　)

(2)不等式≤0的解集是[－1,2]．(　×　)

(3)若不等式*ax*2＋*bx*＋*c*>0的解集是(－∞，*x*1)∪(*x*2，＋∞)，则方程*ax*2＋*bx*＋*c*＝0的两个根是*x*1和*x*2.(　√　)

(4)若方程*ax*2＋*bx*＋*c*＝0(*a*≠0)没有实数根，则不等式*ax*2＋*bx*＋*c*>0的解集为**R**.(　×　)

课堂探究

题型一　一元二次不等式的求解

探究一、　不含参的不等式

例1　求不等式－2*x*2＋*x*＋3<0的解集．

解　化－2*x*2＋*x*＋3<0为2*x*2－*x*－3>0，

解方程2*x*2－*x*－3＝0得*x*1＝－1，*x*2＝，

∴不等式2*x*2－*x*－3>0的解集为(－∞，－1)∪(，＋∞)，

即原不等式的解集为(－∞，－1)∪(，＋∞)．

探究二、　含参不等式

例2　解关于*x*的不等式：*x*2－(*a*＋1)*x*＋*a*<0.

解　由*x*2－(*a*＋1)*x*＋*a*＝0得(*x*－*a*)(*x*－1)＝0，

∴*x*1＝*a*，*x*2＝1，

①当*a*>1时，*x*2－(*a*＋1)*x*＋*a*<0的解集为{*x*|1<*x*<*a*}，

②当*a*＝1时，*x*2－(*a*＋1)*x*＋*a*<0的解集为∅，

③当*a*<1时，*x*2－(*a*＋1)*x*＋*a*<0的解集为{*x*|*a*<*x*<1}．

引申探究

将原不等式改为*ax*2－(*a*＋1)*x*＋1<0，求不等式的解集．

解　若*a*＝0，原不等式等价于－*x*＋1<0，解得*x*>1.

若*a*<0，原不等式等价于(*x*－)(*x*－1)>0，

解得*x*<或*x*>1.

若*a*>0，原不等式等价于(*x*－)(*x*－1)<0.

①当*a*＝1时，＝1，(*x*－)(*x*－1)<0无解；

②当*a*>1时，<1，解(*x*－)(*x*－1)<0得<*x*<1；

③当0<*a*<1时，>1，解(*x*－)(*x*－1)<0得1<*x*<.

综上所述：当*a*<0时，解集为{*x*|*x*<或*x*>1}；

当*a*＝0时，解集为{*x*|*x*>1}；当0<*a*<1时，解集为{*x*|1<*x*<}；当*a*＝1时，解集为∅；当*a*>1时，解集为{*x*|<*x*<1}．

思维升华　含有参数的不等式的求解，往往需要对参数进行分类讨论．

(1)若二次项系数为常数，首先确定二次项系数是否为正数，再考虑分解因式，对参数进行分类讨论，若不易分解因式，则可依据判别式符号进行分类讨论；

(2)若二次项系数为参数，则应先考虑二次项系数是否为零，确定不等式是不是二次不等式，然后再讨论二次项系数不为零的情形，以便确定解集的形式；

(3)对方程的根进行讨论，比较大小，以便写出解集．

**变式迁移：**求不等式12*x*2－*ax*＞*a*2(*a*∈**R**)的解集．

解　∵12*x*2－*ax*＞*a*2，∴12*x*2－*ax*－*a*2＞0，

即(4*x*＋*a*)(3*x*－*a*)＞0，令(4*x*＋*a*)(3*x*－*a*)＝0，

得：*x*1＝－，*x*2＝.

①*a*＞0时，－＜，解集为；

②*a*＝0时，*x*2＞0，解集为{*x*|*x*∈**R**且*x*≠0}；

③*a*＜0时，－＞，解集为.

综上所述，当*a*＞0时，不等式的解集为

；

当*a*＝0时，不等式的解集为{*x*|*x*∈**R**且*x*≠0}；

当*a*＜0时，不等式的解集为.

自学检测

1．(教材改编)不等式*x*2－3*x*－10>0的解集是(　　)

A．(－2,5) B．(5，＋∞)

C．(－∞，－2) D．(－∞，－2)∪(5，＋∞)

答案　D

解析　解方程*x*2－3*x*－10＝0得*x*1＝－2，*x*2＝5，

由*y*＝*x*2－3*x*－10的开口向上，所以*x*2－3*x*－10>0的解集为(－∞，－2)∪(5，＋∞)．

2．设集合*M*＝{*x*|*x*2－3*x*－4<0}，*N*＝{*x*|0≤*x*≤5}，则*M*∩*N*等于(　　)

A．(0,4] B．[0,4)

C．[－1,0) D．(－1,0]

答案　B

解析　∵*M*＝{*x*|*x*2－3*x*－4<0}＝{*x*|－1<*x*<4}，

∴*M*∩*N*＝[0,4)．

3．已知不等式*ax*2－*bx*－1≥0的解集是，则不等式*x*2－*bx*－*a*<0的解集是(　　)

A．(2,3) B．(－∞，2)∪(3，＋∞)

C. D.∪

答案　A

解析　由题意知－，－是方程*ax*2－*bx*－1＝0的根，所以由根与系数的关系得－＋＝，－×＝－.解得*a*＝－6，*b*＝5，不等式*x*2－*bx*－*a*<0即为*x*2－5*x*＋6<0，解集为(2,3)．

4．(教材改编)若关于*x*的不等式*m*(*x*－1)>*x*2－*x*的解集为{*x*|1<*x*<2}，则实数*m*的值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案　2

解析　因为*m*(*x*－1)>*x*2－*x*的解集为{*x*|1<*x*<2}．

所以1,2一定是*m*(*x*－1)＝*x*2－*x*的解，∴*m*＝2.

5．(教材改编)若关于*x*的方程*x*2＋*ax*＋*a*2－1＝0有一正根和一负根，则*a*的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案　(－1,1)

解析　由题意可知，*Δ*>0且*x*1*x*2＝*a*2－1<0，

故－1<*a*<1.