

从函数的观点看一元二次方程和一元二次不等式

目标与建议

【使用说明】

从数学结合的思想方法，理解二次函数的图形和性质、一元二次方程的根、解一元二次不等式之间的关系，重点探究三个“二次”之间的联系，在理解一元二次不等式与二次函数关系的基础上，掌握图象法解一元二次不等式的方法，从而抽象出一元二次不等式的一般解法。

【学法指导】

从函数观点看一元二次方程、一元二次不等式，结合二次函数的图象，判断一元二次方程实根的存在性及根的个数。借助二次函数解一元二次不等式，用集合表示一元二次不等式的解集，借助二次函数的图象，探究一元二次不等式与相应函数、方程的联系。

【主要方法】

- 1、数学抽象：一元二次不等式的定义及解法。
- 2、逻辑推理：理解三个“二次”的关系。
- 3、数学运算：按照步骤解决一元二次不等式
- 4、直观想象：运用二次函数图像解一元二次不等式。

【学习目标】

- 1、通过二次函数图像和性质的研究，理解二次函数与一元二次方程、一元二次不等式之间的联系，掌握图象法解一元二次不等式的方法。
- 2、通过研究三个“二次”的关系，获得一元二次不等式的解法。
- 3、渗透数形结合思想，培养学生数学思维能力

【学习重点】

- 重点：**1. 研究三个“二次”的关系，利用二次函数图像理解一元二次方程的实数根和一元二次不等式的解集；
2. 解一元二次不等式。

【学习难点】

难点：解含参的一元二次不等式。

【学习内容】

三个“二次”即二次函数、一元二次方程、一元二次不等式是高中数学的重要内容，具有丰富的内涵和密切的联系，运用数形结合的思想，理解三者之间的区别及联系，掌握函数、方程及不等式的思想和方法。将一元二次不等式的求解与二次函数以及一元二次方程联系起来，解决求一元二次不等式的一般方法。

知识与方法梳理

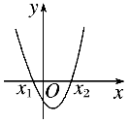
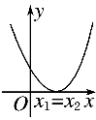
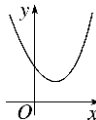
一、一元二次不等式的概念

定义	只含有一个 <u>未知数</u> ，并且未知数的最高次数是 <u>2</u> 的不等式，叫做一元二次不等式
一般形式	$ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c\leq 0$, 其中 $a\neq 0$, a, b, c 均为常数

二、一元二次函数的零点

一般地，对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ，我们把使 $ax^2+bx+c=0$ 的实数 x 叫做二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点。

三、二次函数与一元二次方程的根、一元二次不等式解集的对应关系

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根	有两个不相等的实数根 $x_1, x_2(x_1<x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集	$\{x x<x_1, \text{ 或 } x>x_2\}$	$\left\{x\left x\neq-\frac{b}{2a}\right.\right\}$	$\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集	$\{x x_1<x<x_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

华罗庚教授说过：数缺形时少直观，形少数时难入微，数形结合百般好，隔离分家万事非

归纳总结

1、解一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 、 $ax^2+bx+c<0$ ($a>0$) 的步骤：

(1) 二次项的系数变为正 ($a>0$)

(2) 看能否因式分解，不能分解的计算 Δ ，

(3) 求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实根；（画出函数图像）

(4) （结合函数图像）写出不等式的解集。

2、[微点提醒]

1. 解不等式 $ax^2+bx+c>0(<0)$ 时不要忘记当 $a=0$ 时的情形。

2. 不等式 $ax^2+bx+c>0(<0)$ 恒成立的条件要结合其对应的函数图像决定。

- (1) 不等式 $ax^2+bx+c>0$ 对任意实数 x 恒成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=0, \\ c>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a>0, \\ \Delta<0. \end{cases}$
- (2) 不等式 $ax^2+bx+c<0$ 对任意实数 x 恒成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=0, \\ c<0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a<0, \\ \Delta<0. \end{cases}$

思考辨析

判断下面结论是否正确(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 若不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 (x_1, x_2) , 则必有 $a>0$. ()
- (2) 不等式 $\frac{x-2}{x+1} \leq 0$ 的解集是 $[-1, 2]$. ()
- (3) 若不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, 则方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根是 x_1 和 x_2 . ()
- (4) 若方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 没有实数根, 则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$. ()

基础自测

- (教材改编) 不等式 $x^2-3x-10>0$ 的解集是()
A. $(-2, 5)$ B. $(5, +\infty)$
C. $(-\infty, -2)$ D. $(-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$
- 设集合 $M = \{x | x^2-3x-4<0\}$, $N = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$, 则 $M \cap N$ 等于()
A. $(0, 4]$ B. $[0, 4)$
C. $[-1, 0)$ D. $(-1, 0]$
- 已知不等式 $ax^2-bx-1 \geq 0$ 的解集是 $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right]$, 则不等式 $x^2-bx-a<0$ 的解集是()
A. $(2, 3)$ B. $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$
C. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
- (教材改编) 若关于 x 的不等式 $m(x-1)>x^2-x$ 的解集为 $\{x | 1<x<2\}$, 则实数 m 的值为_____.
- (教材改编) 若关于 x 的方程 $x^2+ax+a^2-1=0$ 有一正根和一负根, 则 a 的取值范围为_____.

课堂探究

探究一、 不含参的不等式

例 1 求不等式 $-2x^2+x+3<0$ 的解集.

探究二、 含参不等式

例 2 解关于 x 的不等式: $x^2-(a+1)x+a<0$.

引申探究

将原不等式改为 $ax^2-(a+1)x+1<0$, 求不等式的解集.

思维升华 含有参数的不等式的求解, 往往需要对参数进行分类讨论.

(1) 若二次项系数为常数, 首先确定二次项系数是否为正数, 再考虑分解因式, 对参数进行分类讨论, 若不易分解因式, 则可依据判别式符号进行分类讨论;

(2) 若二次项系数为参数, 则应先考虑二次项系数是否为零, 确定不等式是不是二次不等式, 然后再讨论二次项系数不为零的情形, 以便确定解集的形式;

(3) 对方程的根进行讨论, 比较大小, 以便写出解集.

变式迁移: 求不等式 $12x^2-ax>a^2(a\in\mathbf{R})$ 的解集.

自学检测

1. (教材改编)不等式 $x^2-3x-10>0$ 的解集是()
- A. $(-2,5)$ B. $(5, +\infty)$
- C. $(-\infty, -2)$ D. $(-\infty, -2)\cup(5, +\infty)$
2. 设集合 $M=\{x|x^2-3x-4<0\}$, $N=\{x|0\leq x\leq 5\}$, 则 $M\cap N$ 等于()
- A. $(0,4]$ B. $[0,4)$
- C. $[-1,0]$ D. $(-1,0]$
3. 已知不等式 $ax^2-bx-1\geq 0$ 的解集是 $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right]$, 则不等式 $x^2-bx-a<0$ 的解集是()
- A. $(2,3)$ B. $(-\infty, 2)\cup(3, +\infty)$
- C. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
4. (教材改编)若关于 x 的不等式 $m(x-1)>x^2-x$ 的解集为 $\{x|1<x<2\}$, 则实数 m 的值为_____.
5. (教材改编)若关于 x 的方程 $x^2+ax+a^2-1=0$ 有一正根和一负根, 则 a 的取值范围为_____.