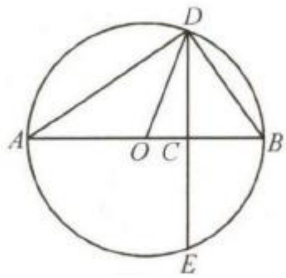
《基本不等式及其应用》学程拓展答案

教材上给出了均值定理的几何解释，体现了数形结合的重要思想，可以加深对均值不等式的理解.

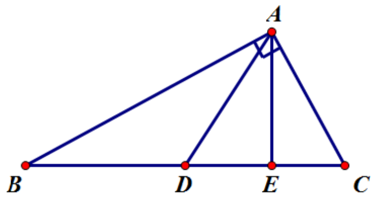


如图， AB 是圆 O 的直径，点 C 是 AB 上一点，， $AC=a$， $BC=b$，过点 C 作垂直于 AB 的弦 DE，联结 AD、BD，你能根据下图给出 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 的几何解释吗？

另外还可以：在 $Rt\Delta ABC$ 中， $\angle BAC$ 为直角，点 D 为 BC 边的中点， AE 为 BC 边上高，设 $BE=a$， $CE=b$，由射影定理得 $AE^2=ab$

即， $AE=\sqrt{ab}$　　　　①

又由于三角形中斜边大于直角边，



∴　$AD>AE$　　　　②

∵　$AD=\dfrac{a+b}{2}$　　　　③

联合①②③得， $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

当且仅当 AD 与 AE 重合,即 $a=b$ 时等号成立.

利用不等式求函数的最值问题

此类问题对分析问题、解决问题的能力有较高要求，需及时发现各个变量间的关系，探索思路，解决问题．利用基本不等式求最值问题，基本方法是通过“代换”“拆项”“凑项”等改变原式的结构，使其具备基本不等式的应用条件，要注意“一正二定三相等”，要特别注意代换过程中“元”的范围，以及等号能否取到等问题．适当体会“对勾函数的基本性质”.

均值不等式的主要形式体现

已知 x,y 都是正数，（1）如果积 xy 是定值 p，那么当 $x=y$ 时， $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{p}$

（2）如果和 $x+y$ 是定值 s，那么当 $x=y$ 时， xy 有最大值 $\dfrac{1}{4}s^2$

强调：（1）最值的含义（“≥”取最小值，“≤”取最大值）

（2）用均值定理求最值的三个必要条件：一“正”、二“定”、三“相等”

1. 设 $a,b>0$，且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\leqslant 2\sqrt{2}$， $(a-b)^2=4(ab)^3$，则 $a+b=$ ______________.

解析：由 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\leqslant 2\sqrt{2}$，得 $a+b\leqslant 2\sqrt{2}ab$.

又 $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab=4(ab)^3+4ab\geqslant 4\times 2\sqrt{ab(ab)^3}=8(ab)^2$，　①

所以 $a+b\geqslant 2\sqrt{2}ab$，从而 $a+b=2\sqrt{2}ab$．①中等号成立为条件 $ab=1$，所以 $a+b=2\sqrt{2}$．

2. 设 n 为自然数，a、b 为正实数，且满足 $a+b=2$，则 $\dfrac{1}{1+a^n}+\dfrac{1}{1+b^n}$ 的最小值是__________.

解：$ab\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=1$，从而 $a^nb^n\leqslant 1$，故 $\dfrac{1}{1+a^n}+\dfrac{1}{1+b^n}=\dfrac{1+a^n+1+b^n}{1+a^n+b^n+a^nb^n}\geqslant 1$．等号当且仅当 $a=b=1$ 时成立．即所求最小值 1．

3. 如果正数 a,b,c,d 满足 $a+b=cd=4$，那么（　　）

A. $ab\le c+d$，且等号成立时 a,b,c,d 的取值唯一

B. $ab\ge c+d$，且等号成立时 a,b,c,d 的取值唯一

C. $ab\le c+d$，且等号成立时 a,b,c,d 的取值不唯一

D. $ab\ge c+d$，且等号成立时 a,b,c,d 的取值不唯一

答案：A