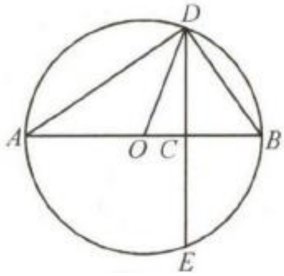
《基本不等式及其应用》学程拓展

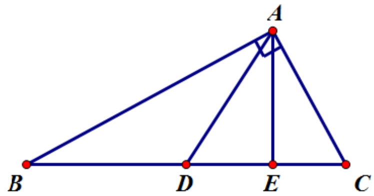
教材上给出了均值定理的几何解释，体现了数形结合的重要思想，可以加深对均值不等式的理解.



如图，AB 是圆 O 的直径，点 C 是 AB 上一点，，$AC=a$，$BC=b$，过点 C 作垂直于 AB 的弦 DE，联结 AD、BD，你能根据下图给出 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 的几何解释吗？

另外还可以：在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle BAC$ 为直角，点 D 为 BC 边的中点，AE 为 BC 边上高，设 $BE=a$，$CE=b$，由射影定理得 $AE^2=ab$

即，$AE=\sqrt{ab}$ ①



又由于三角形中斜边大于直角边，

∴ $AD>AE$ ②

∵ $AD=\frac{a+b}{2}$ ③

联合①②③得，$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

当且仅当 AD 与 AE 重合,即 $a=b$ 时等号成立.

利用不等式求函数的最值问题

此类问题对分析问题、解决问题的能力有较高要求，需及时发现各个变量间的关系，探索思路，解决问题．利用基本不等式求最值问题，基本方法是通过“代换”“拆项”“凑项”等改变原式的结构，使其具备基本不等式的应用条件，要注意“一正二定三相等”，要特别注意代换过程中“元”的范围，以及等号能否取到等问题．适当体会“对勾函数的基本性质”．

均值不等式的主要形式体现

已知 x,y 都是正数，（1）如果积 xy 是定值 p，那么当 $x=y$ 时，$x+y$ 有最小值 $2\sqrt{p}$

（2）如果和 $x+y$ 是定值 s，那么当 $x=y$ 时，xy 有最大值 $\frac{1}{4}s^2$

强调：（1）最值的含义（“≥”取最小值，“≤”取最大值）

（2）用均值定理求最值的三个必要条件：一“正”、二“定”、三“相等”

1. 设 $a,b>0$，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant2\sqrt{2}$，$(a-b)^2=4(ab)^3$，则 $a+b=$ ______________.

2. 设 n 为自然数，a、b 为正实数，且满足 $a+b=2$，则 $\frac{1}{1+a^n}+\frac{1}{1+b^n}$ 的最小值是__________.

3. 如果正数 a,b,c,d 满足 $a+b=cd=4$，那么（　　）

A. $ab\le c+d$，且等号成立时 a,b,c,d 的取值唯一

B. $ab\ge c+d$，且等号成立时 a,b,c,d 的取值唯一

C. $ab\le c+d$，且等号成立时 a,b,c,d 的取值不唯一

D. $ab\ge c+d$，且等号成立时 a,b,c,d 的取值不唯一