

《基本不等式及其应用》学习指南

目标与建议

【使用说明】

基本不等式在知识体系中起了承上启下的作用，同时在生活及生产实际中有着广泛的应用，基本不等式是从大量数学问题和现实问题中抽象出来的一个模型，在公式推导中所蕴涵的数学思想方法如数形结合、抽象归纳等在各种不等式的研究中均有着广泛的应用；另外，在解决函数最值问题中，基本不等式也起着重要的作用，需要掌握基本不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a, b \geq 0)$ ；并结合具体实例，能用基本不等式解决简单的最大值或最小值问题。

【学法指导】

大家对于这部分题目可能会有一种难者不会，会者不难的感觉。希望通过我们这一专题的设计能够让大家都在原有基础上有所收获。原本会的同学们能够对问题认识的更加系统和深刻；原本不太会的同学们也可以有招去试着做做。同学们可以先自己独自推导基本不等式及其相关结论，然后遵守一定之规尝试着去做做。同学们可以通过教师的讲解、图形的直观分析来帮助理解和掌握本节课的教学内容。

【主要方法】

- 1、数形之间架起一座桥——数形结合的思想方法；
- 2、化归与转化的思想方法；

【教学目标】

- 1.同学们通过可以自己独立尝试推导证明基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} (a, b \geq 0)$ ，并能够理解其几何含义.
- 2.同学们能够结合具体实例，能用基本不等式解决简单的最大值或最小值问题.

【教学重点】

- 1、理解并掌握基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} (a, b \geq 0)$ 的形式；
- 2、会用基本不等式求最大值与最小值。

【教学难点】

知识之间的牵引和综合应用能力的提升。

一、知识梳理

1.基本不等式: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

(1)基本不等式成立的条件: $a \geq 0, b \geq 0$.

(2)等号成立的条件:当且仅当 $a=b$ 时取等号.

(3)其中 $\frac{a+b}{2}$ 称为正数 a, b 的算术平均数, $\sqrt{ab}$ 称为正数 a, b 的几何平均数.

2.两个重要的不等式

(1) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 当且仅当 $a = b$ 时取等号.

(2) $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 当且仅当 $a = b$ 时取等号.

3. 利用基本不等式求最值

已知 $x \geq 0, y \geq 0$, 则

(1) 如果积 xy 是定值 p , 那么当且仅当 $x = y$ 时, $x + y$ 有最小值是 $2\sqrt{p}$ (简记: 积定和最小).

(2) 如果和 $x + y$ 是定值 s , 那么当且仅当 $x = y$ 时, xy 有最大值是 $\frac{s^2}{4}$ (简记: 和定积最大).

自学检测

1. 判断下列结论正误 (在括号内打 “√” 或 “×”)

(1) 两个不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 与 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 成立的条件是相同的. ()

(2) 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的最小值是 2. ()

(3) 函数 $f(x) = \sin x + \frac{4}{\sin x}$ 的最小值为 4. ()

(4) $x > 0$ 且 $y > 0$ 是 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ 的充要条件. ()

2. 若 $x > 0, y > 0$, 且 $x + y = 18$, 则 $\sqrt{xy}$ 的最大值为 ()

A. 9

B. 18

C. 36

D. 81

3. 若 $x < 0$, 则 $x + \frac{1}{x}$ ()

A. 有最小值, 且最小值为 2

B. 有最大值, 且最大值为 2

C. 有最小值, 且最小值为 -2

D. 有最大值, 且最大值为 -2

4. 已知 $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x}$, 则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 上的最小值为 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{4}{3}$

C. -1

D. 0

5. 一段长为 30 m 的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园, 墙长 18 m, 则这个矩形的长为 _____ m, 宽为 _____ m 时菜园面积最大.

二、学生听老师的教学视频

1. 判断下列结论正误 (在括号内打 “√” 或 “×”)

(1)两个不等式 $a^2+b^2 \geq 2ab$ 与 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 成立的条件是相同的.()

(2)函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的最小值是 2.()

(3)函数 $f(x)=\sin x+\frac{4}{\sin x}$ 的最小值为 4.()

(4) $x>0$ 且 $y>0$ 是 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$ 的充要条件.()

解析

(1)不等式 $a^2+b^2 \geq 2ab$ 成立的条件是 $a, b \in \mathbf{R}$; 不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 成立的条件是 $a \geq 0, b \geq 0$.

(2)函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的值域是 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, 没有最小值.

(3)函数 $f(x)=\sin x+\frac{4}{\sin x}$ 没有最小值.

(4) $x>0$ 且 $y>0$ 是 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$ 的充分不必要条件.

答案 (1)× (2)× (3)× (4)×

考点一 利用基本不等式求最值

角度 1 利用配凑法求最值

例 1. 已知 $x < \frac{5}{4}$, 则 $f(x)=4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 的最大值为_____.

解析: 因为 $x < \frac{5}{4}$, 所以 $5-4x > 0$, 则

$$f(x)=4x-2+\frac{1}{4x-5}=-\left(5-4x+\frac{1}{5-4x}\right)+3 \leq -2\sqrt{(5-4x) \cdot \frac{1}{5-4x}}+3=-2+3=1.$$

当且仅当 $5-4x=\frac{1}{5-4x}$, 即 $x=1$ 时, 等号成立. 故 $f(x)=4x-2+\frac{1}{4x-5}$ 的最大值为 1.

答案: 1

角度 2 利用常数代换法求最值

例 2. 已知 $x>0$, $y>0$, 且 $2x+y=1$, 则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为_____;

解析 (1) $\because x>0, y>0$, 且 $2x+y=1$, $\therefore \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \times 1 = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \cdot (2x+y) = 3 + \frac{y}{x} + \frac{2x}{y} \geq 3 + 2\sqrt{2}$. 当且仅当

$\frac{y}{x} = \frac{2x}{y}$ 时, 取等号.

角度 3 基本不等式积(ab)与和(a+b)的转化

例 3. 正数 a, b 满足 $ab=a+b+3$, 则 ab 的取值范围是_____.

解析 $\because a, b$ 是正数, $\therefore ab = a + b + 3 \geq 2\sqrt{ab} + 3$, 解得 $\sqrt{ab} \geq 3$, 即 $ab \geq 9$.

答案 $[9, +\infty)$

变式迁移: 本例已知条件不变, 求 $a + b$ 的最小值.

解 $\because a > 0, b > 0, \therefore ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, 即 $a + b + 3 \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, 整理得 $(a+b)^2 - 4(a+b) - 12 \geq 0$, 解得 $a + b \geq 6$ 或 $a + b \leq -2$ (舍). 故 $a + b$ 的最小值为 6.

考点二 基本不等式在实际问题中的应用

例 4 一段长为 30 m 的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园, 墙长 18 m, 则这个矩形的长为 _____ m, 宽为 _____ m 时菜园面积最大.

解析 设矩形的长为 x m, 宽为 y m. 则 $x + 2y = 30$, 所以 $S = xy = \frac{1}{2}x \cdot (2y) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x+2y}{2}\right)^2 = \frac{225}{2}$, 当

且仅当 $x = 2y$, 即 $x = 15, y = \frac{15}{2}$ 时取等号.

答案 15 $\frac{15}{2}$

[思维升华]

1. 基本不等式具有将“和式”转化为“积式”和将“积式”转化为“和式”的放缩功能, 常常用于比较数(式)的大小或证明不等式, 解决问题的关键是分析不等式两边的结构特点, 选择好利用基本不等式的切入点.

2. 对于基本不等式, 不仅要记住原始形式, 而且还要掌握它的几种变形形式及公式的逆用等, 例

如: $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ ($a > 0, b > 0$) 等, 同时还要注意不等式成立的条件和等号成立的条件.

[易错防范]

1. 使用基本不等式求最值, “一正” “二定” “三相等” 三个条件缺一不可.

2. 对使用基本不等式时等号取不到的情况, 可考虑使用函数 $y = x + \frac{m}{x}$ ($m > 0$) 的单调性.