《含参不等式的解法》学程拓展答案

1、求不等式x^2-$2ax$-$3a^2$<0 的解集

解析：原不等式可化为$(x-3a)(x+a)<0$

当$a=0$时，解集为ϕ；

当$a>0$时，解集为$\{x|-a<x<3a\}$；

当$a<0$时，解集为$\{x|3a<x<-a\}$；

2、求不等式$(a-x)(x-\frac{1}{a})>0$的解集.

解析：原不等式可化为$(x-a)(x-\frac{1}{a})<0$

因为$a\neq 0$，所以

当$a<-1$时，解集为$(a,\frac{1}{a})$；

当$-1<a<0$时，解集为$(\frac{1}{a},a)$；

当$0<a<1$时，解集为$(a,\frac{1}{a})$；

当$a>1$时，解集为$(\frac{1}{a},a)$；

3、设函数 $f(x)=\log_b\frac{x^2-2x+2}{1+2ax}\ (b>0且b\neq 1)$

当 b>1 时，求使$f(x)$>0 的所有 x 的值

分析 1：遵循定义域优先的原则，先考察$f(x)$的定义域，解不等式$\frac{x^2-2x+2}{1+2ax}>0$，

注意到分子x^2-2x+2恒正，故分母$1+2ax>0$，

当$a=0$时，$f(x)$的定义域是R

当$a>0$时，$f(x)$的定义域是$(-\frac{1}{2a},+\infty)$

当$a<0$时，$f(x)$的定义域是$(-\infty,\ -\frac{1}{2a})$

在定义域内可将所要考察的对数不等式$f(x)$>0 化为代数不等式$\frac{x^2-2x+2}{1+2ax}>1$

因为在定义域内分式的分母的符号是恒正，

故可去分母得一元二次不等式：$x^2-2(1+a)x+1>0$

判别式$\triangle=4(1+a)2-4=4a(a+2)$.

(1)当$\triangle<0$时，即$-2<a<0$时$x^2-2(1+a)x+1>0$ 恒成立，考虑到$f(x)$定义域，有$f(x)>0\Leftrightarrow x<-\frac{1}{2a}$；

(2) 当$\triangle=0$时，即$a=-2$或$a=0$,由于此时两值对应的定义域不同，故

当$a=0$时，$f(x)>0\Leftrightarrow(x-1)^2>0\Leftrightarrow x\in$R 且$x\neq 1$；

当$a=-2$时，,$f(x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}x<\frac{1}{4}\\(x+1)^2>0\end{cases}\Leftrightarrow x<\frac{1}{4}$且$x\neq -1$；

(3) 当$\triangle>0$时，即$a>0$或$a<-2$，方程$x^2-2(1+a)x+1=0$的两根为

$x_1=1+a-\sqrt{a^2+2a}$,$x_2=1+a+\sqrt{a^2+2a}$，由于$a>0$及$a<-2$时定义域不同，故需分类讨论。

若$a>0$，则$-\frac{1}{2a}<0<x_1<x_2$，$f(x)>0\Leftrightarrow -\frac{1}{2a}<x<1+a-\sqrt{a^2+2a}$ 或 $x>1+a+\sqrt{a^2+2a}$；

若 $a<-2$，则 $x_1<x_2<0<-\frac{1}{2a}$，$f(x)>0\Leftrightarrow x<1+a-\sqrt{a^2+2a}$ 或 $1+a+\sqrt{a^2+2a}<x<-\frac{1}{2a}$。

综上，当$a<-2$时，$x<1+a-\sqrt{a^2+2a}$ 或 $1+a+\sqrt{a^2+2a}<x<-\frac{1}{2a}$.

当$a=-2$时，$x<\frac{1}{4}$且$x\neq-1$；

当$-2<a<0$时，$x<-\frac{1}{2a}$；

当$a=0$ 时，$x\in R$ 且$x\neq1$；

当$a>0$时，$-\frac{1}{2a}<x<1+a-\sqrt{a^2+2a}$或$x>1+a+\sqrt{a^2+2a}$；

注: 解不等式的过程中要分清确定性与不确定性因素，根据不确定因素产生的原因进行讨论。

分析 2： 将对数不等式$f(x)>0$同解变形为：$\frac{x^2-2x+2}{1+2ax}>1$，

即$\frac{x^2-2(a+1)x+1}{2ax+1}>0$

当$a=0$时，$f(x)>0\Leftrightarrow(x-1)^2>0\Leftrightarrow x\in R$ 且$x\neq1$；

当$a\neq0$时，原不等同解为：$2a(x+\frac{1}{2a})[x^2-2(a+1)x+1]>0$，

考察二次三项式$x2-2(1+a)x+1$的判别式$\triangle=4(1+a)^2-4=4a(a+2)$，

(1)、当$-2<a<0$ 时，即$\triangle<0$，$x^2-2(1+a)x+1>0$ 恒成立，故 $f(x)>0\Leftrightarrow x<-\frac{1}{2a}$

(2)、当$a=-2$时,即$\triangle=0$（其中 $a=0$ 已讨论）

$f(x)>0\Leftrightarrow-(x-\frac{1}{4})(x+1)^2>0 \quad \Leftrightarrow x<\frac{1}{4}$且$x\neq-1$；

(3)、当 $a>0$ 或 $a<-2$时，即$\triangle>0$，方程$x^2-2(1+a)x+1=0$的两根为:

$x_1=1+a-\sqrt{a^2+2a}$，$x_2=1+a+\sqrt{a^2+2a}$

原不等式可化为: $2a(x+\frac{1}{2a})(x-x_1)(x-x_2)>0$

①、当 $a>0$，则$-\frac{1}{2a}<0<x_1<x_2$，$f(x)>0\Leftrightarrow-\frac{1}{2a}<x<1+a-\sqrt{a^2+2a}$ 或 $x>1+a+\sqrt{a^2+2a}$；

②、当 $a<-2$,则 $x_1<x_2<0<-\frac{1}{2a}$,$f(x)>0\Leftrightarrow x<1+a-\sqrt{a^2+2a}$ 或 $1+a+\sqrt{a^2+2a}<x<-\frac{1}{2a}$.

注： 同解变形是解析 2 的基本思想，从上面的两种解法中我们体会到对参数的讨论是水到渠成的事情，而不是强扭的瓜.