《含参不等式的解法》学习指南

目标与建议

【使用说明】

参数问题是学习中的难点，因为参数取不同的值会使问题的性质、特征与求解方法产生不确定性，为了使不确定性变为确定问题，通常需要讨论，这也是确定分类讨论标准的依据。

本节课通过不等式的参数问题中含参不等式的解法，帮助同学们了解参数问题的处理策略，领悟一般方法思想。

【学法指导】

含参数问题的讨论是数学学习的一个难点。关键是要弄清为何讨论、如何讨论。在解决这类问题时，应正确认识问题中的参数对问题性质与特征的影响，从而形成解决参数问题的正确思维习惯与解题思想。

本节课从含参数不等式的求解作为切入点，其他含参数的问题的求解方法与问题解决的思想意识是相同的。

【主要方法】

由于解含参数不等式的主要目的是求未知数的取值集合，而不是求参数的范围，因此在分析含参数不等式时，把参数看成是常数，确定不等式的类型，按相应类型不等式的解题方法进行转化，即战略上藐视参数；但在求解过程中要审视参数对不等式类型、同解变形、解的结构等是否有不确定性影响，若有不确定性则予以讨论，否则不予讨论，即战术上重视参数。

【学习目标】

- 1、识别不同类型不等式，掌握不同类型不等式的一般解法；
- 2、准确判断参数对不等式类型、同解变形、零点的大小等带来的不确定性影响，将不变式中由参数引起的不确定性通过分类讨论转化为确定性。
- 3、从含参数不等式的解决方法与过程中领悟一般方法思想，正确认识含参数问题的思维方向与意识。

【学习重点】

- 1、不同类型不等式的求解方法；
- 2、根据参数对不等式求解方法与过程带来的不确定性准确分类讨论，

【学习难点】

准确识别参数不同取值对不等式求解方法与过程的影响，知道为何讨论，如何讨论。

【学习内容】

不等式是课标的主干内容之一，高考中往往与集合、函数、导数等知识融合，体现其工具性、实用性和灵活性，不等式问题中常常涉及到参数或未知量的分类讨论，这节课主要学习含参不等式的求解过程中如何看待和处理参数问题。

知识与方法梳理

不同类型不等式的解法

一次不等式的解法

1、化为 $ax > b$ 或 $ax < b$ 的形式;

2、当 $a > 0$ 时, $x > \frac{b}{a}$ 或 $x < \frac{b}{a}$;

当 $a < 0$ 时, $x < \frac{b}{a}$ 或 $x > \frac{b}{a}$

一元二次不等式的解法

1、化为 $ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$) 或 $ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$) 的形式;

2、若 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 设方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根分别为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)

结合二次函数图象可得: 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$) 的解集为 $\{x | x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$

若 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$) 的解集为 $\{x | x < -\frac{b}{2a} \text{ 或 } x > -\frac{b}{2a}\}$;

若 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$) 的解集为 R

不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$) 解法类似.

分式不等式的解法

1、移项通分化为 $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ 或 $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ 或 $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ 或 $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ 的形式;

2、由 $\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) > 0$; $\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) < 0$ 化为整式不等式

3、 $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) > 0$ 或 $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) \geq 0$ 且 $g(x) \neq 0$;

解不等式也需要优先考虑定义域。

不等式组的解法:

分别解每一个不等式再取交集。

方法小结

解不等式的其本方法: **先定型, 再定法;**

同一类型不等式解法基本相同, 不同类型不等型解法有差异。

典型例题精讲

例 1 解不等式: $ax^2 - (a+1)x + 1 < 0$.

解析:

若 $a=0$, 原不等式等价于 $-x+1 < 0$, 解得 $x > 1$.

若 $a \neq 0$

若 $a < 0$, 原不等式等价于 $(x - \frac{1}{a})(x - 1) > 0$, 解得 $x < \frac{1}{a}$ 或 $x > 1$.

若 $a > 0$, 原不等式等价于 $(x - \frac{1}{a})(x - 1) < 0$.

①当 $a = 1$ 时, $\frac{1}{a} = 1$, $(x - \frac{1}{a})(x - 1) < 0$ 无解;

②当 $a > 1$ 时, $\frac{1}{a} < 1$, 解 $(x - \frac{1}{a})(x - 1) < 0$ 得 $\frac{1}{a} < x < 1$;

③当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$, 解 $(x - \frac{1}{a})(x - 1) < 0$ 得 $1 < x < \frac{1}{a}$.

综上所述:

当 $a < 0$ 时, 解集为 $\{x | x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > 1\}$;

当 $a = 0$ 时, 解集为 $\{x | x > 1\}$;

当 $0 < a < 1$ 时, 解集为 $\{x | 1 < x < \frac{1}{a}\}$;

当 $a = 1$ 时, 解集为 $\emptyset$;

当 $a > 1$ 时, 解集为 $\{x | \frac{1}{a} < x < 1\}$.

思维方法升华

一、此不等求解过程中有三个层次分类讨论:

1、不等式中二次项系数含有参数, 应先考虑二次项系数是否为零, 分别确定不等式是一次不等式还是二次不等式;

2、当二次项系数不为零时, 不等式左边正好可以因式分解, 由于二次项系数正负不同时, 相应二次函数图象开口方向不同时不等式的解集不同, 需进行第二层次分类讨论;

3、当 $a > 0$ 时, 对相应方程的两根大小又不确定, 需比较大小, 以便写出解集.

二、分类讨论问题求解后需整理出完整答案

三、分类讨论时需清楚:

为何分类讨论, 即参数带来什么样的不确定性;

如何分类讨论, 即参数取什么样的值时能将不确定性问题化为确定性问题。

例 2 设 $a \neq b$, 解关于 x 的不等式 $a^2x + b^2(1 - x) \geq [ax + b(1 - x)]^2$.

解析:

不等式 $a^2x + b^2(1 - x) \geq [ax + b(1 - x)]^2$

可化为 $(a^2 - b^2)x + b^2 \geq (a - b)^2x^2 + 2(a - b)bx + b^2$

移项, 整理得 $(a - b)^2(x^2 - x) \leq 0$

因为 $a \neq b$, 即 $(a - b)^2 \geq 0$

所以 $x^2 - x \leq 0$, 即 $x(x - 1) \leq 0$

解得不等式解集为 $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$

思维方法升华

通常认为解含参数不等式的基本解法是针对参数分类讨论，这种说法易给学生解含参数不等式带来思维与方法上的混乱，事实上，并不是所有含参数的不等式都需要讨论。

解含参数不等式的主要目的是求未知数的取值集合，而不是求参数的范围，因此在分析含参数不等式时，把参数看成是常数，确定不等式的类型，按相应类型不等式的解题方法进行转化，即战略上藐视参数；但在求解过程中要审视参数对不等式类型、同解变形、解的结构等是否有不确定性影响，若有不确定性必须讨论，即战术上重视参数。

例 1 中参数先后对不等式的类型、同解变形、解的结构产生不确定性影响，故分三个层次对参数进行分类讨论，同时在 $a > 0$ 时又要进行二级分类。

含参数问题的讨论是数学学习的一个难点。关键是要弄清为何讨论、如何讨论。在解决这类问题时，应正确认识问题中的参数，形成解决参数问题的正确思维习惯与解题思想。

自学检测

1、已知关于 x 的一元二次不等式 $x^2-6x+a \leq 0$ 的解集中有且仅有 3 个整数,则所有符合条件的整数 a 的值的和是()

- A.13 B.18 C.21 D.26

2、不等式 $x^2-2ax-3a^2 < 0 (a > 0)$ 的解集为_____.

3、已知不等式 $mx^2+nx-\frac{1}{m} < 0$ 的解集为 $\{x|x < -\frac{1}{2} \text{ 或 } x > 2\}$, 则 $m-n =$ _____.

1.答案 C

2.答案 $\{x|-a < x < 3a\}$

3.解析 由已知得 $m < 0$ 且 $-\frac{1}{2}, 2$ 是方程 $mx^2 + nx - \frac{1}{m} = 0$ 的两根,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{1}{2} + 2 = -\frac{n}{m}, \\ \left(-\frac{1}{2}\right) \times 2 = -\frac{1}{m^2}, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} m = -1, \\ n = \frac{3}{2} \end{cases} \text{或} \begin{cases} m = 1, \\ n = -\frac{3}{2} \text{(舍)}. \end{cases}$$

$$\therefore m - n = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}.$$

答案 $-\frac{5}{2}$