

《一元二次不等式的解法》学程拓展答案

1. 解关于 x 的不等式: $12x^2 - ax > a^2 (a \in \mathbf{R})$.

解: $\because 12x^2 - ax > a^2, \therefore 12x^2 - ax - a^2 > 0$,

即 $(4x + a)(3x - a) > 0$, 令 $(4x + a)(3x - a) = 0$,

得 $x_1 = -\frac{a}{4}, x_2 = \frac{a}{3}$.

当 $a > 0$ 时, $-\frac{a}{4} < \frac{a}{3}$, 解集为 $\left\{x \mid x < -\frac{a}{4} \text{ 或 } x > \frac{a}{3}\right\}$;

当 $a = 0$ 时, $x^2 > 0$, 解集为 $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 0\}$;

当 $a < 0$ 时, $-\frac{a}{4} > \frac{a}{3}$, 解集为 $\left\{x \mid x < \frac{a}{3} \text{ 或 } x > -\frac{a}{4}\right\}$.

综上所述, 当 $a > 0$ 时, 不等式的解集为

$\left\{x \mid x < -\frac{a}{4} \text{ 或 } x > \frac{a}{3}\right\}$;

当 $a = 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq 0\}$;

当 $a < 0$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid x < \frac{a}{3} \text{ 或 } x > -\frac{a}{4}\right\}$.

2. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x$. 若对任意 $x \in [a, a+1]$, 恒有 $f(x+a) \geq f(2x)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

解: 因为函数 $f(x)$ 是偶函数,

故函数图象关于 y 轴对称, 且在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

所以由 $f(x+a) \geq f(2x)$ 可得 $|x+a| \geq 2|x|$ 在 $[a, a+1]$ 上恒成立,

从而 $(x+a)^2 \geq 4x^2$ 在 $[a, a+1]$ 上恒成立,

化简得 $3x^2 - 2ax - a^2 \leq 0$ 在 $[a, a+1]$ 上恒成立,

设 $h(x) = 3x^2 - 2ax - a^2$,

则有 $\begin{cases} h(a) = 0 \leq 0, \\ h(a+1) = 4a+3 \leq 0, \end{cases}$ 解得 $a \leq -\frac{3}{4}$.

故实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right]$.