

《一元二次不等式的解法》学习指南

目标与建议

一元二次不等式的解法是初中一元一次不等式、一元一次不等式组的延续和深化,对已学习过的集合知识的巩固和运用具有重要的作用,也与后面的函数、数列、三角函数、直线与圆锥曲线以及导数等内容密切相关。许多问题的解决都会借助一元二次不等式的解法.因此,一元二次不等式的解法在整个高中数学教学中具有很强的基础性,体现出很大的工具作用.

本节课利用二次函数的图象研究一元二次不等式的解法,要能够理解一元二次方程、一元二次不等式和二次函数三者的关系,并利用其关系解不等式.

学法指导

大家已经学习了一元一次不等式(组)的解法、一元二次方程和二次函数的相关知识,会画二次函数的图像,在学习的过程中,同学们要特别注意三个二次(二次函数、一元二次方程和一元二次不等式)三者之间的密切联系.对于有些需要进行分类讨论的题目,开始可能会觉得比较困难,关键是要弄清楚分类的依据,为什么要这样分类.

主要方法

- 1、数形结合的思想方法;
- 2、化归与转化的思想方法.

学习目标

- 1.会结合二次函数的图象,判断一元二次方程实根的存在性及实根的个数,了解函数的零点与方程根的关系;
- 2.了解一元二次不等式的现实意义.能借助二次函数求解一元二次不等式,并能用集合表示一元二次不等式的解集;
- 3.借助二次函数的图象,了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系.

学习重点

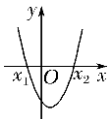
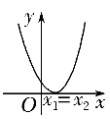
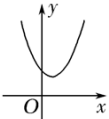
一元二次不等式的解法.

学习难点

含有参数的一元二次不等式的解法.

知识梳理

1.三个“二次”间的关系

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$)的图象			
一元二次方程	有两相异实根	有两相等实根	没有实数根

$ax^2+bx+c=0$ ($a>0$)的根	$x_1, x_2 (x_1 < x_2)$	$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	
$ax^2+bx+c>0$ ($a>0$)的解集	$\{x x > x_2 \text{ 或 } x < x_1\}$	$\left\{x x \neq -\frac{b}{2a}\right\}$	R
$ax^2+bx+c<0$ ($a>0$)的解集	$\{x x_1 < x < x_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

2. $(x-a)(x-b)>0$ 或 $(x-a)(x-b)<0$ 型不等式的解集

不等式	解集		
	$a < b$	$a = b$	$a > b$
$(x-a)(x-b)>0$	$\{x x < a \text{ 或 } x > b\}$	$\{x x \neq a\}$	$\{x x < b \text{ 或 } x > a\}$
$(x-a)(x-b)<0$	$\{x a < x < b\}$	$\emptyset$	$\{x b < x < a\}$

3. 分式不等式与整式不等式

$$(1) \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0;$$

$$(2) \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) < 0;$$

$$(3) \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \geq 0 \text{ 且 } g(x) \neq 0;$$

$$(4) \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \leq 0 \text{ 且 } g(x) \neq 0.$$

例题讲解

不含参数的不等式

【例 1】求不等式 $-2x^2+x+3<0$ 的解集.

解 化 $-2x^2+x+3<0$ 为 $2x^2-x-3>0$,

解方程 $2x^2-x-3=0$, 得 $x_1=-1, x_2=\frac{3}{2}$,

$\therefore$ 不等式 $2x^2-x-3>0$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$,

即原不等式的解集为 $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

含参数的不等式

【例 2】解关于 x 的不等式 $kx^2-2x+k<0 (k \in \mathbf{R})$.

解 ①当 $k=0$ 时,不等式的解为 $x>0$.

②当 $k>0$ 时,若 $\Delta=4-4k^2>0$,即 $0<k<1$ 时,不等式的解为 $\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k}<x<\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{k}$;

若 $\Delta\leq 0$,即 $k\geq 1$ 时,不等式无解.

③当 $k<0$ 时,若 $\Delta=4-4k^2>0$,即 $-1<k<0$ 时,

不等式的解为 $x<\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{k}$ 或 $x>\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k}$,

若 $\Delta<0$,即 $k<-1$ 时,不等式的解集为 $\mathbf{R}$;

若 $\Delta=0$,即 $k=-1$ 时,不等式的解为 $x\neq -1$,

综上所述, $k\geq 1$ 时,不等式的解集为 $\varnothing$;

$0<k<1$ 时,不等式的解集为

$$\left\{x \mid \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k} < x < \frac{1+\sqrt{1-k^2}}{k}\right\};$$

$k=0$ 时,不等式的解集为 $\{x|x>0\}$;

当 $-1<k<0$ 时,不等式的解集为

$$\left\{x \mid x < \frac{1+\sqrt{1-k^2}}{k}, \text{ 或 } x > \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k}\right\};$$

$k=-1$ 时,不等式的解集为 $\{x|x\neq -1\}$;

$k<-1$ 时,不等式的解集为 $\mathbf{R}$.

【例 3】 解关于 x 的不等式 $ax^2-2\geq 2x-ax(a\in\mathbf{R})$.

解 原不等式可化为 $ax^2+(a-2)x-2\geq 0$.

①当 $a=0$ 时,原不等式化为 $x+1\leq 0$,解得 $x\leq -1$.

②当 $a>0$ 时,原不等式化为 $\left(x-\frac{2}{a}\right)(x+1)\geq 0$,

解得 $x\geq \frac{2}{a}$ 或 $x\leq -1$.

③当 $a<0$ 时,原不等式化为 $\left(x-\frac{2}{a}\right)(x+1)\leq 0$.

当 $\frac{2}{a}>-1$,即 $a<-2$ 时,解得 $-1\leq x\leq \frac{2}{a}$;

当 $\frac{2}{a}=-1$,即 $a=-2$ 时,解得 $x=-1$ 满足题意;

当 $\frac{2}{a} < -1$, 即 $-2 < a < 0$ 时, 解得 $\frac{2}{a} \leq x \leq -1$.

综上所述, 当 $a = 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x | x \leq -1\}$;

当 $a > 0$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid x \geq \frac{2}{a} \text{ 或 } x \leq -1\right\}$;

当 $-2 < a < 0$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{2}{a} \leq x \leq -1\right\}$;

当 $a = -2$ 时, 不等式的解集为 $\{-1\}$;

当 $a < -2$ 时, 不等式的解集为 $\left\{x \mid -1 \leq x \leq \frac{2}{a}\right\}$.

方法总结 1. 解一元二次不等式的一般方法和步骤

(1) 化: 把不等式变形为二次项系数大于零的标准形式.

(2) 判: 计算对应方程的判别式, 根据判别式判断方程有没有实根(无实根时, 不等式解集为 $\mathbf{R}$ 或 $\emptyset$).

(3) 求: 求出对应的一元二次方程的根.

(4) 写: 利用“大于零取两边, 小于零取中间”写出不等式的解集.

2. 含有参数的不等式的求解, 往往需要对参数进行分类讨论:

(1) 若二次项系数为常数, 首先确定二次项系数是否为正数, 再考虑分解因式, 对参数进行讨论; 若不易分解因式, 则可对判别式进行分类讨论;

(2) 若二次项系数为参数, 则应先考虑二次项系数是否为零, 然后再讨论二次项系数不为零的情形, 以便确定解集的形式;

(3) 其次对相应方程的根进行讨论, 比较大小, 以便写出解集.

一元二次方程与一元二次不等式

【例 4】 已知不等式 $ax^2 - bx - 1 > 0$ 的解集是 $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}\right\}$, 则不等式 $x^2 - bx - a \geq 0$ 的解集是_____.

解析 由题意, 知 $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ 是方程 $ax^2 - bx - 1 = 0$ 的两个根, 且 $a < 0$, 所以
$$\begin{cases} -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{b}{a}, \\ -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{-1}{a}, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$$\begin{cases} a = -6, \\ b = 5. \end{cases}$$

故不等式 $x^2 - bx - a \geq 0$ 为 $x^2 - 5x + 6 \geq 0$,

解得 $x \geq 3$ 或 $x \leq 2$.

答案 $\{x|x \geq 3 \text{ 或 } x \leq 2\}$

方法总结 1.一元二次方程的根就是相应一元二次函数的零点,也是相应一元二次不等式解集的端点值.

2.给出一元二次不等式的解集,相当于知道了相应二次函数的开口方向及与 x 轴的交点,可以利用代入根或根与系数的关系求待定系数.

一元二次不等式恒成立问题

【例 5】对于任意实数 x ,不等式 $(a-2)x^2 - 2(a-2)x - 4 < 0$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是()

A. $(-\infty, 2)$

B. $(-\infty, 2]$

C. $(-2, 2)$

D. $(-2, 2]$

解析 当 $a-2=0$,即 $a=2$ 时, $-4 < 0$ 恒成立;

当 $a-2 \neq 0$,即 $a \neq 2$ 时,

$$\text{则有} \begin{cases} a-2 < 0, \\ \Delta = [-2(a-2)]^2 - 4 \times (a-2) \times (-4) < 0, \end{cases}$$

解得 $-2 < a < 2$.

综上,实数 a 的取值范围是 $(-2, 2]$.

答案 D

【例 6】设函数 $f(x) = mx^2 - mx - 1 (m \neq 0)$,若对于 $x \in [1, 3]$, $f(x) < -m + 5$ 恒成立,求 m 的取值范围.

解析 要使 $f(x) < -m + 5$ 在 $[1, 3]$ 上恒成立,

故 $mx^2 - mx + m - 6 < 0$,

则 $m\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}m - 6 < 0$ 在 $x \in [1, 3]$ 上恒成立.

法一 令 $g(x) = m\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}m - 6, x \in [1, 3]$.

当 $m > 0$ 时, $g(x)$ 在 $[1, 3]$ 上是增函数,

所以 $g(x)_{\max} = g(3) = 7m - 6 < 0$.

所以 $m < \frac{6}{7}$, 则 $0 < m < \frac{6}{7}$.

当 $m < 0$ 时, $g(x)$ 在 $[1, 3]$ 上是减函数,

所以 $g(x)_{\max} = g(1) = m - 6 < 0$.

所以 $m < 6$, 所以 $m < 0$.

综上所述, m 的取值范围是 $\left\{ m \mid 0 < m < \frac{6}{7} \text{ 或 } m < 0 \right\}$.

法二 因为 $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$,

又因为 $m(x^2 - x + 1) - 6 < 0$, 所以 $m < \frac{6}{x^2 - x + 1}$.

因为函数 $y = \frac{6}{x^2 - x + 1} = \frac{6}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$ 在 $[1, 3]$ 上的最小值为 $\frac{6}{7}$, 所以只需 $m < \frac{6}{7}$ 即可.

因为 $m \neq 0$, 所以 m 的取值范围是 $\left\{ m \mid 0 < m < \frac{6}{7} \text{ 或 } m < 0 \right\}$.

方法总结 1. 对于一元二次不等式恒成立问题, 恒大于 0 就是相应的二次函数的图象在给定的区间上全部在 x 轴上方, 恒小于 0 就是相应的二次函数的图象在给定的区间上全部在 x 轴下方.

2. 一元二次不等式恒成立问题常转化为求二次函数的最值或用分离参数法求最值.

自学检测

判断下列结论正误(在括号内打“√”或“×”)

(1) 若不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, 则方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根是 x_1 和 x_2 . ()

(2) 若不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 (x_1, x_2) , 则必有 $a > 0$. ()

(3) 不等式 $x^2 \leq a$ 的解集为 $[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$. ()

(4) 若方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a < 0)$ 没有实数根, 则不等式 $ax^2 + bx + c > 0 (a < 0)$ 的解集为 $\mathbf{R}$. ()