条件概率学习指南

一、学习目标

1. 了解条件概率的定义；
2. 掌握条件概率的计算方法；
3. 会利用条件概率公式解决一些简单的实际问题.

二、学法指导

学习重点是掌握条件概率的计算方法以解决一些简单的实际问题，学生应该先明确研究的问题是不是条件概率，然后选择合适的方法和步骤去求解.

三、教学过程

【环节一】知识回顾

事件概率加法公式：若事件 A 与事件 B 互斥，则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ；

1. 事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件叫做 A 与 B 的和事件，记为 $A \cup B$ 或 $A + B$ ；
2. 事件 A 与事件 B 都发生的事件叫做 A 与 B 的积事件，记为 $A \cap B$ 或 AB ；
3. 若 AB 为不可能事件，则说事件 A 与 B 互斥.

【环节二】自主探究

问题：三张奖券中只有一张能中奖，现分别由 3 名同学无放回地抽取，问最后一名同学抽到中奖奖券的概率是否比前两位小？

提示：三张奖券分别用 X_1, X_2, Y 表示，其中 Y 表示那张中奖奖券，那么都有哪些抽取结果呢？

$$\begin{aligned}\Omega &= \{X_1X_2Y, X_1YX_2, YX_1X_2, X_2X_1Y, X_2YX_1, YX_2X_1\} \\ B &= \{X_1X_2Y, X_2X_1Y\}\end{aligned}$$

由古典概型可知，最后一名同学抽到中奖奖券的概率为：

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{3}$$

所以最后一名同学抽到中奖奖券的概率与前两位一样.

思考：如果已经知道**第一名同学没有抽到**中奖奖券，那么最后一名同学抽到中奖奖券的概率又是多少？

“第一名同学没有抽到中奖奖券”为事件 A

“最后一名同学抽到中奖奖券”为事件 B

第一名同学没有抽到中奖奖券的条件下，最后一名同学抽到中奖奖券的概率记为 $P(B|A)$

事件 A 已经发生，只需在 A 的范围内考虑问题即可，我们记此时的事件空间为 Ω_A ，则

$$\Omega_A = \{X_1X_2Y, X_1YX_2, X_2X_1Y, X_2YX_1\}$$

在事件 A 发生的情况下，事件 B 发生等价于事件 A 和事件 B 同时发生，即事件 AB 发生，而事件 AB 中

含有两个事件，即 $AB = \{X_1X_2Y, X_2X_1Y\}$

$$P(B|A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

另一方面，运用古典概型概率公式，我们容易得到

$$P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{\frac{n(AB)}{n(\Omega)}}{\frac{n(A)}{n(\Omega)}} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

【环节三】归纳定义

1. 设 A 和 B 为两个事件，那么，在“A 已发生”的条件下，事件 B 发生的概率叫做_____。

用符号_____表示。读作 A 发生的条件下 B 发生的概率。

2. 条件概率的计算公式：_____

3. 运算性质：

(1) $0 \leq P(B|A) \leq 1$

(2) 在古典概型中， $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\mu(AB)}{\mu(A)} = \frac{\text{事件 } AB \text{ 包括的基本事件（样本点）数}}{\text{事件 } A \text{ 包括的基本事件（样本点）数}}$

在几何概型中， $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\mu(AB)}{\mu(A)} = \frac{\text{区域 } AB \text{ 的几何度量（长度，面积，体积等）}}{\text{区域 } A \text{ 的几何度量（长度，面积，体积等）}}$

(3) 当 B、C 互斥时， $P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A)$

(4) $P(B|A), P(AB)$ 的区别与联系

【环节四】例题讲解

例 1. 在 5 道题中有 3 道理科题和 2 道文科题. 如果不放回地依次抽取 2 道题, 求:

- (1) 第 1 次抽到理科题的概率;
- (2) 第 1 次和第 2 次都抽到理科题的概率;
- (3) 在第 1 次抽到理科题的条件下, 第 2 次抽到理科题的概率.

解: 设第 1 次抽到理科题为事件 A , 第 2 次抽到理科题为事件 B , 则第 1 次和第 2 次都抽到理科题为事件 AB .

(1) 从 5 道题中不放回地依次抽取 2 道的事件数为 $n(\Omega)=A_5^2=20$.

根据分步乘法计数原理, $n(A)=A_3^1 \times A_4^1=12$. 于是 $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.

(2) 因为 $n(AB)=A_3^2=6$, 所以 $P(AB)=\frac{n(AB)}{n(\Omega)}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$.

(3) 解法 1 由 (1) (2) 可得, 在第 1 次抽到理科题的条件下, 第 2 次抽到理科题的概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}.$$

解法 2 因为 $n(AB)=6$, $n(A)=12$, 所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

$$P(A|B)=P(A_1|B)+P(\bar{A}_1A_2|B)=\frac{1}{5}+\frac{4 \times 1}{5 \times 4}=\frac{2}{5}.$$

例 2. 甲、乙两地都位于长江下游, 根据一百多年的气象记录, 知道甲、乙两地一年中雨天占的比例分别为 20% 和 18%, 两地同时下雨的比例为 12%, 问:

- (1) 乙地为雨天时甲地也为雨天的概率是多少?
- (2) 甲地为雨天时乙地也为雨天的概率是多少?

解 分别用 A , B 记事件{甲下雨}和{乙下雨}. 按题意有,

$$P(A)=20\%, \quad P(B)=18\%, \quad P(AB)=12\%$$

$$(1) P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.18}=0.67$$

$$(2) P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.12}{0.20}=0.60$$

【环节五】练一练

1. 从一副不含大小王的 52 张扑克牌中不放回的抽取 2 次，每次抽 1 张。已知第一次抽到 A，求第二次也抽到 A 的概率。

2. 在一个盒子中有大小一样的 20 个球，其中 10 个红球，10 个白球

(1) 求第 1 个人摸出 1 个红球，紧接着第 2 个人摸出一个白球的概率。

(2) 求在第 1 个人摸出 1 个红球的条件下，第 2 个人摸出一个白球的概率。

【环节六】总结提炼

1. 条件概率的定义、性质、计算方法

2. 求解条件概率的一般步骤