

函数模型在概率中的应用第 2 课时学习指南

【学习目标】

- 1.理解离散型随机变量的均值或期望的意义，会根据离散型随机变量的分布列求出均值或期望；
- 2.理解离散型随机变量的方差的概念,实际意义，会求离散型随机变量的方差.

【学法指导】

问题探究——与旧知联系获得解决方案——提炼结论——应用理解——总结

【学习过程】

一、探究：

2020 年奥运会在即，借此契机，为了宣传全民健身，学校举办一场学生运动会。我班将在甲乙两名同学中选出一人参加投飞镖比赛。甲、乙两名同学在同一条件下投掷飞镖，所得环数的分布列分别是：

X_1	6	7	8	9	10
P	0.16	0.14	0.42	0.1	0.18
X_2	6	7	8	9	10
P	0.19	0.24	0.12	0.28	0.17

我们作为班级的智囊团，要对甲、乙两名同学的投飞镖能力进行评估，给出推荐人选，并说明理由。

问题：我们从哪些维度进行评估？

回顾：初中在学习《统计与概率》中，抽取样本之后，我们对样本数据进行分析它的一些数字特征：如反映数据平均水平的平均值、中位数、众数，反映数据稳定性的方差、标准差、极差。

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \quad s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

PK 平均水平:

问题：如何根据分布列求随机变量的平均值呢？

如：收集射击运动员的 6 次射击的环数：6,8,8,8,9,9，求这 6 次射击环数的平均值。

$$\bar{x} = \frac{6+8+8+8+9+9}{6} = 8$$

这个式子也可以理解为：

$$\bar{x} = \frac{6 \times 1 + 8 \times 3 + 9 \times 2}{6} = 6 \times \frac{1}{6} + 8 \times \frac{3}{6} + 9 \times \frac{2}{6} = 8$$

这是 6 环、8 环、9 环三种结果的一种加权平均，这里的权数分别是 $\frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}$ ，即样本中 6 环、8 环、9 环的频率。

【注】权是秤锤，权数是起权衡轻重作用的数值。加权平均是指在计算若干个数量的平均数时，考虑到每个数量在总量中所具有的重要性不同，分别给予不同的权数。

样本的平均值是随着样本的不同而变化的，随着样本容量的增加，样本的平均值越来越接近于总体的均值，同时，每个取值的频率越来越接近于概率。

那么对于离散型随机变量，我们把权数取作随机变量每个取值的概率，则有

$$\text{甲：} 6 \times 0.16 + 7 \times 0.14 + 8 \times 0.42 + 9 \times 0.1 + 10 \times 0.18 = 8$$

$$\text{乙：} 6 \times 0.19 + 7 \times 0.24 + 8 \times 0.12 + 9 \times 0.28 + 10 \times 0.17 = 8$$

结论：随机变量 X_1 、 X_2 的平均值相等，因此甲乙两人的平均水平不分伯仲。

PK 稳定性:

如：收集射击运动员的 6 次射击的环数：6,8,8,8,9,9，求这 6 次射击环数的方差。

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{(6-8)^2 + (8-8)^2 + (8-8)^2 + (8-8)^2 + (9-8)^2 + (9-8)^2}{6} \\ &= \frac{(6-8)^2 \times 1 + (8-8)^2 \times 3 + (9-8)^2 \times 2}{6} \\ &= (6-8)^2 \times \frac{1}{6} + (8-8)^2 \times \frac{3}{6} + (9-8)^2 \times \frac{2}{6} \\ &= 1 \end{aligned}$$

我们知道，样本方差反映了样本数据的稳定性，对于随机变量的稳定性，我们也寻求一个类似的量来进行刻画。

$$\text{甲: } (6-8)^2 \times 0.16 + (7-8)^2 \times 0.14 + (8-8)^2 \times 0.42 + (9-8)^2 \times 0.1 + (10-8)^2 \times 0.18 = 1.6$$

$$\text{乙: } (6-8)^2 \times 0.19 + (7-8)^2 \times 0.24 + (8-8)^2 \times 0.12 + (9-8)^2 \times 0.28 + (10-8)^2 \times 0.17 = 1.96$$

结论：甲比乙更加稳定，即相对于平均水平的偏离程度小，成绩更集中于 8 环。

问题：选派哪位同学参赛会更有胜算呢？

生：甲

问题：甲一定是最佳人选吗？

思考：如果其他班级参赛选手的成绩都在 8 环左右，本班应该派哪一名同学参赛？如果其他班级参赛选手的成绩都在 7 环左右，又应该派哪一名同学参赛？

生：如果其他班级参赛选手的成绩都在 8 环左右，本班应该派乙同学参赛。如果其他班级参赛选手的成绩都在 7 环左右，应该派甲同学参赛。

对于甲同学来说，我们将通过加权平均得到的 8 称为随机变量 X_1 的“均值”或“数学期望”，1.6 称为随机变量 X_1 的“方差”。

二、定义：

一般地，若离散型随机变量 X 的分布列为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

则：(1) 称

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_i p_i + \cdots + x_n p_n$$

为随机变量 X 的**均值**或**数学期望**。它反映了离散型随机变量取值的平均水平。

结论：① $E(aX + b) = aE(X) + b$ ；

② 若 X 服从两点分布，则 $E(X) = p$ 。

(2) 称

$$\begin{aligned} D(X) &= \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i \\ &= (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \cdots + (x_i - E(X))^2 p_i + \cdots + (x_n - E(X))^2 p_n \end{aligned}$$

为随机变量 X 的**方差**，并称其算术平方根 $\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的**标准差**，它反映了离散

型随机变量 X 与其均值 $E(X)$ 的平均偏离程度。

结论：① $D(aX + b) = a^2 D(X)$ ；

② 若 X 服从两点分布，则 $D(X) = p(1 - p)$ 。

三、例题

例 1. 有甲、乙两个单位都愿意用你，而你能获得如下信息：

甲单位不同职位月工资 X_1 /元	6500	7000	8000	9000
获得相应职位的概率 P_1	0.4	0.3	0.2	0.1

乙单位不同职位月工资 X_2 /元	5000	7000	9000	11000
获得相应职位的概率 P_2	0.4	0.3	0.2	0.1

根据工资待遇的差异情况，你愿意选择哪家单位？

如果认为自己的能力很强，应选择_____单位；

如果认为自己的能力不强，应选择_____单位。

解：平均水平：

$$E(X_1) = 6500 \times 0.4 + 7000 \times 0.3 + 8000 \times 0.2 + 9000 \times 0.1 = 7200$$

$$E(X_2) = 5000 \times 0.4 + 7000 \times 0.3 + 9000 \times 0.2 + 11000 \times 0.1 = 7000$$

稳定性：

$$\begin{aligned} D(X_1) &= (6500 - 7200)^2 \times 0.4 + (7000 - 7200)^2 \times 0.3 + (8000 - 7200)^2 \times 0.2 + (9000 - 7200)^2 \times 0.1 \\ &= 660000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(X_2) &= (5000 - 7000)^2 \times 0.4 + (7000 - 7000)^2 \times 0.3 + (9000 - 7000)^2 \times 0.2 + (11000 - 7000)^2 \times 0.1 \\ &= 4000000 \end{aligned}$$

结论：如果认为自己的能力**很强**，应选择**乙**单位；

如果认为自己的能力**不强**，应选择**甲**单位。

例 2. 若随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	a	b

且 $E(X) = 1$ ，求 $D(X)$ 。

$$\text{解: } \begin{cases} \frac{1}{3} + a + b = 1 \\ 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot a + 2 \cdot b = 1 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{则 } D(X) = (0-1)^2 \times \frac{1}{3} + (1-1)^2 \times \frac{1}{3} + (2-1)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

四、小结

- 1、离散型随机变量的均值（或数学期望），方差及其含义；
- 2、思想方法：转化思想。