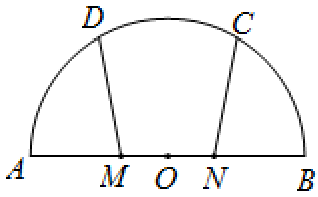
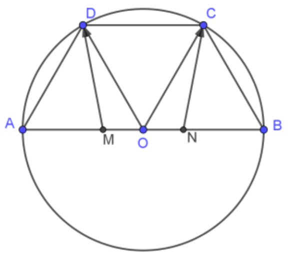
高一数学第 60 课时 6.4.3 向量法证明余弦定理、正弦定理拓展提升

1. 如图，AB 是半圆 O 的直径，C,D 是弧 AB 的三等分点，M,N 是线段 AB 的三等分点，若 $OA=6$，则 $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{NC}$ 的值是(　　)



（A）2　（B）10　（C）26　（D）28

【答案】C.



解析：（基底法或坐标法）连接 OD，OC，则依据题意知：

$$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{NC}==(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD})\cdot(\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OC})=(\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})\cdot(\frac{1}{3}\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})$$

$$=(\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})\cdot(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})=-\frac{1}{9}\overrightarrow{AO}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC}=26$$

2.已知平面上三点 A,B,C 满足 $|\overrightarrow{AB}|=6$，$|\overrightarrow{AC}|=8$，$|\overrightarrow{BC}|=10$，

则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=$(　　　)

A. 48　　B. -48　　C. 100　　D. -100

【答案】D.

解析：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$，平方得 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})^2=0$，整理得：

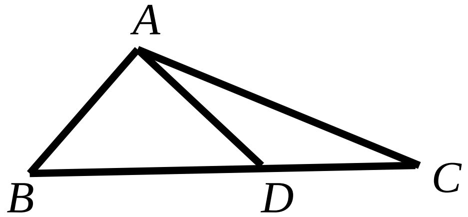
$$(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CA}^2)+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB})=0$$

$$2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB})=-(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CA}^2)=-200,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-100$$

3.如图，在 △ABC 中，$AD\perp AB$，$\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}\overrightarrow{BD}$，$|\overrightarrow{AD}|=1$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$__________

解：基底法，设基底 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\}$



则 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\sqrt{3}\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AB}+\sqrt{3}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=(1-\sqrt{3})\overrightarrow{AB}+\sqrt{3}\overrightarrow{AD}$

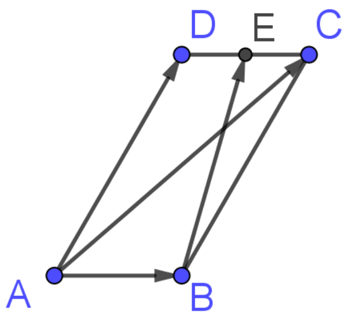
$\because \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$，$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$

$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=0+\sqrt{3}\overrightarrow{AD}^2=\sqrt{3}|\overrightarrow{AD}|^2=\sqrt{3}$

【答案】$\sqrt{3}$.

4. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$AD=1$，$\angle BAD=60°$，E 为 CD 的中点．若$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=1$，则 AB =________.

解：基底法，设基底$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\}$



$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$， $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})=1$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1$

$\therefore \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2=1$

又$\because |\overrightarrow{AD}|=1$，$\therefore \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=0$

$\therefore \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos 60^\circ-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=0$

$\therefore |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

【答案】$\frac{1}{2}$.