高一数学第60课时向量法证明余弦定理、正弦定理

学习目标

1：通过对三角形边角关系的探索，能证明正、余弦定理，掌握定理证明方法；

2：理解并掌握正、余弦定理的内容，能够应用定理及其推论解三角形；

3：用向量法解决问题，提升直观想象和数学运算素养，提高分析问题解决问题的能力；

4：体会转化与数形结合等数学思想，增进对数学本质的理解.

学法指导：

向量既是几何研究对象，也是代数研究对象，是沟通几何与代数的桥梁，要在熟练掌握相关知识的同时注意转化与数形结合思想的应用；

一、知识回顾

1.用向量方法处理平面几何问题的“三部曲”

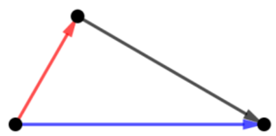
① 建立平面几何与向量的联系，用向量表示问题中涉及的几何元素，将平面几何问题转化为向量问题；

② 通过向量运算，研究几何元素之间的关系；如：距离、夹角等问题

③ 把向量的运算结果“翻译”成几何关系.

2.向量减法的三角形法则

口诀：共起点、连中点、箭头指被减

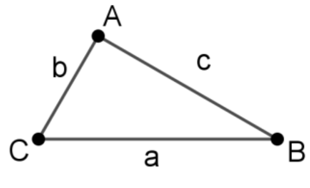


$(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

二：定理证明

1.余弦定理

在△ABC中，三个角A、B、C所对的边分别是a，b，c，怎样用a，b和C表示c.



解析：选择一组基底求解

选取$\{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\}$为基底，

并设$\overrightarrow{CB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$， $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$,

则$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$

$\therefore \vec{c}^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b};$

$\quad =\vec{a}^2+\vec{b}^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos C;$

$\therefore c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

同理可得：

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$；

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$；

余弦定理：三角形中任何一边的平方，等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍.

余弦定理的总结：

①已知 SAS 求第三边；

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A；\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B；\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

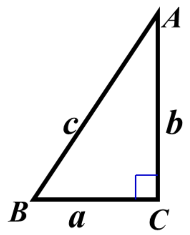
②已知 SSS 求三个内角；

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}；\ \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}；\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

2.正弦定理

（一）类比探究，理解猜想：

以直角三角形为例：在 $Rt\Delta ABC$ 中，设角 $C=90^\circ$，角A，B，C所对的边长分别a，b，c.



则$\sin A=\dfrac{a}{c},\sin B=\dfrac{b}{c}$，

从而$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=c$，

又因为$C=90^\circ$，所以$\sin 90^\circ=1$，即$\sin C=1$，

所以$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

（二）向量运算，证明猜想：

（1）若ΔABC中为锐角三角形，角A，B，C所对的边长分别为a，b，c，

请证明：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

（2）若ΔABC中为钝角三角形，角A，B，C所对的边长分别为a，b，c，

请证明：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

用向量法证明正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

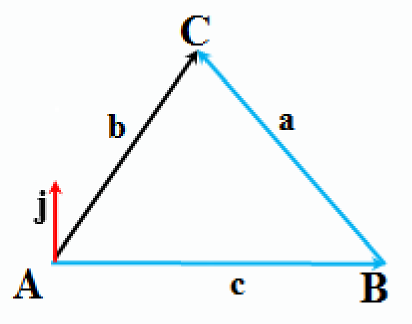
思考：向量的数量积运算中出现了角的余弦，而我们需要的是角的正弦. 如何实

现转化？

由诱导公式$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$可知，

我们可以通过构造角之间的互余关系，把边与角的余弦关系转化为正弦关系.

（1）已知：如图，在锐角$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边为a,b,c.



求证：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

证明：设$\mathbf{j}$是与$\overrightarrow{AB}$垂直的单位向量.

因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$，

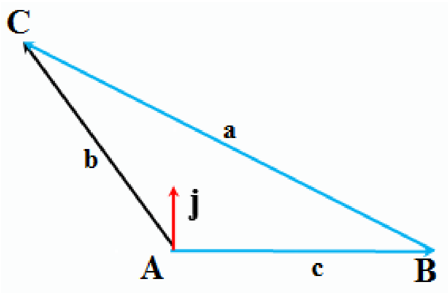
所以$\overrightarrow{AC}\cdot\mathbf{j}=\overrightarrow{AB}\cdot\mathbf{j}+\overrightarrow{BC}\cdot\mathbf{j}$，

所以$|\overrightarrow{AC}|\cdot|\mathbf{j}|\cdot\cos(\frac{\pi}{2}-\angle BAC)=|\overrightarrow{BC}|\cdot|\mathbf{j}|\cdot\cos(\frac{\pi}{2}-\angle ABC)$，

即$|\overrightarrow{AC}|\cdot\sin\angle BAC=|\overrightarrow{BC}|\cdot\sin\angle ABC$，

故$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

（2）已知：如图，在钝角$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边为a,b,c.



求证：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

证明：设$\mathbf{j}$是与$\overrightarrow{AB}$垂直的单位向量.

因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$，

所以$\overrightarrow{AC}\cdot\mathbf{j}=\overrightarrow{AB}\cdot\mathbf{j}+\overrightarrow{BC}\cdot\mathbf{j}$，

所以$|\overrightarrow{AC}|\cdot|\mathbf{j}|\cdot\cos(\angle BAC-\frac{\pi}{2})=|\overrightarrow{BC}|\cdot|\mathbf{j}|\cdot\cos(\frac{\pi}{2}-\angle ABC)$，

即$|\overrightarrow{AC}|\cdot\sin\angle BAC=|\overrightarrow{BC}|\cdot\sin\angle ABC$，

故$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

正弦定理的总结：

1. 向量法证明正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

2. 此结论可以用于求解 AAS，ASA 的模型，而 SSA 的模型也可以用，

但此时三角形不确定.

3. 此结论的变形：

(1) 写成连比式：$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

(2) 写成分体式：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（R 为三角形外接圆的半径）

则$a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$.或$\sin A=\frac{a}{2R},\sin B=\frac{b}{2R},\sin C=\frac{c}{2R}$（边角转化）

4. 三角形的面积公式：$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin\mathrm{C}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}=\frac{abc}{4R}$

三: 向量法小练习：

已知向量 $\vec{a}=(1,0)$, $\vec{b}=(1,1)$, $\vec{c}=(-1,0)$,求满足 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{l}$的 λ和 μ的值.

解：寻找一个与$\vec{a}$垂直的向量 $\vec{j}=(0,1)$,

由已知 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{l}$，两边同时点乘 $\vec{j}=(0,1)$ ，可得：

$\vec{c}\cdot\vec{j}=\lambda\vec{a}\cdot\vec{j}+\mu\vec{b}\cdot\vec{j}$,

即 0=0+μ ，所以 μ=0 ，进而 $\lambda=-1$.

四：课堂小结

1. 运用向量数量积巧证余弦定理、正弦定理;

2. 余弦定理、正弦定理的内容;

3. 余弦定理、正弦定理的应用:

（1）已知三边求三个角；（SSS）

（2）已知两边和它们的夹角，求第三边和其他两个角.（SAS）

（3）已知两角一边；（AAS、ASA）

（4）已知两边和一边所对的角；（SSA）

（5）判断三角形的形状