

高一数学第 60 课时向量法证明余弦定理、正弦定理

学习目标

- 1: 通过对三角形边角关系的探索，能证明正、余弦定理，掌握定理证明方法；
- 2: 理解并掌握正、余弦定理的内容，能够应用定理及其推论解三角形；
- 3: 用向量法解决问题，提升直观想象和数学运算素养，提高分析问题解决问题的能力；
- 4: 体会转化与数形结合等数学思想，增进对数学本质的理解.

学法指导：

向量既是几何研究对象，也是代数研究对象，是沟通几何与代数的桥梁，要在熟练掌握相关知识的同时注意转化与数形结合思想的应用；

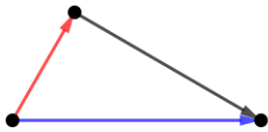
一、知识回顾

1. 用向量方法处理平面几何问题的“三部曲”

- ① 建立平面几何与向量的联系，用向量表示问题中涉及的几何元素，将平面几何问题转化为向量问题；
- ② 通过向量运算，研究几何元素之间的关系；如：距离、夹角等问题
- ③ 把向量的运算结果“翻译”成几何关系.

2. 向量减法的三角形法则

口诀：共起点、连中点、箭头指被减

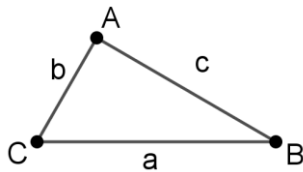


$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

二：定理证明

1. 余弦定理

在 $\triangle ABC$ 中，三个角 A、B、C 所对的边分别是 a ， b ， c ，怎样用 a ， b 和 C 表示 c .



余弦定理：三角形中任何一边的平方，等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍.

余弦定理的总结：

①已知 SAS 求第三边；

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

②已知 SSS 求三个内角；

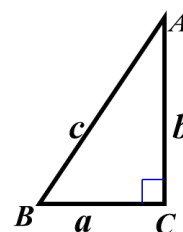
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

2. 正弦定理

(一) 类比探究，理解猜想：

以直角三角形为例：在 $Rt\triangle ABC$ 中，设角 $C = 90^\circ$ ，角 A, B, C 所对的边长分别

a, b, c .



(二) 向量运算，证明猜想：

(1) 若 $\triangle ABC$ 中为锐角三角形，角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c ,

请证明： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$

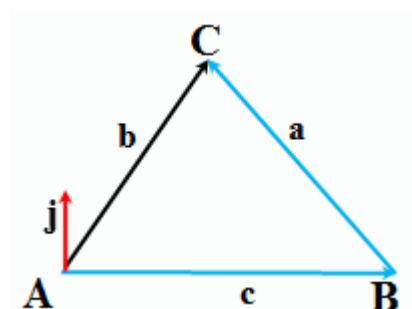
(2) 若 $\triangle ABC$ 中为钝角三角形，角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c ,

请证明： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$

(1) 已知：如图，在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边为 a, b, c .

求证： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$

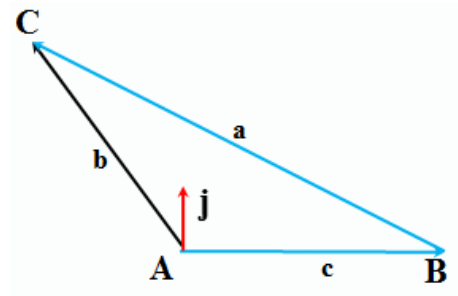
证明：



(2) 已知：如图，在钝角 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边为 a, b, c .

求证： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$.

证明：



正弦定理的总结：

1. 向量法证明正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

2. 此结论可以用于求解 AAS，ASA 的模型，而 SSA 的模型也可以用，

但此时三角形不确定.

3. 此结论的变形：

(1) 写成连比式： $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

(2) 写成分体式： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 为三角形外接圆的半径)

则 $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$. 或 $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$ (边角转化)

4. 三角形的面积公式： $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{abc}{4R}$

三：向量法小练习：

已知向量 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (1, 1)$, $\vec{c} = (-1, 0)$, 求满足 $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ 的 λ 和 μ 的值.

解：

四：课堂小结

1. 运用向量数量积巧证余弦定理、正弦定理；

2. 余弦定理、正弦定理的内容；

3. 余弦定理、正弦定理的应用：

(1) 已知三边求三个角；（SSS）

(2) 已知两边和它们的夹角，求第三边和其他两个角.（SAS）

(3) 已知两角一边；（AAS、ASA）

(4) 已知两边和一边所对的角；（SSA）

(5) 判断三角形的形状