

函数模型在概率中的应用第 1 课时学习指南

一、学习目标

1. 理解离散型随机变量及分布列的概念和性质；
2. 经历概念的形成过程，体会模型、归纳等数学思想方法。

二、学法指导

以问题为学习线索，以解决问题为学习目标，发散思维，大胆联系并运用所学知识解决问题，随时归纳。

三、学习过程

(一) 复习回顾

问题 1：什么是概率？

概率是描述随机事件发生可能性大小的度量。

问题 2：如何求随机事件发生的概率？

两种方法，试验法和模型求解。

问题 3：古典概型的特点及概率公式？

有限性和等可能性，事件发生的概率等于事件包含的基本事件个数与试验总的基本事件个数之比。

问题 4：同时抛两枚骰子，求点数之差的绝对值为 3 的概率。

解：同时抛两枚骰子，试验的所有结果为：

(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),
(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),
(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),
(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),
(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),
(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)

共 36 个。用 A 表示事件“点数之差的绝对值为 3”，其中事件 A 包含下列结果：

(1,4),(2,5),(3,6),(4,1),(5,2),(6,3),

共 6 个。根据古典概型概率计算公式可得： $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ 。

问题 5: 如果还想知道其它可能出现的实验结果, 以及所对应的概率, 应该如何表示呢?

这里要表达的是一种对应关系, 是试验结果与其对应概率之间对应关系的表达, 如果分别设事件去表述显然太繁琐, 不是数学的“性格”——简洁。

你学过哪些对应关系的表达? 函数, 而且此对应与函数一样, 同样满足“存在且唯一”的特征, 能否转变为函数关系进行表达? 显然只需将试验结果数量化。

(二) 引出新知

如何将试验结果数量化呢? 如果试验结果自带数值, 就选择该数值, 如果没有, 就自行假设, 如果有先例, 就按习惯执行, 比如抛一枚硬币, 向上对应数 1, 向下对应数 0。

这里试验对应的结果数量化后可能为 0,1,2,3,4,5, 也就是说自变量可能有 6 种取值, 为了体现与函数的区别, 以及概率是研究随机事件的, 自变量特称做随机变量。

随机变量常用字母 X 、 Y 、 ξ 、 η ... 表示, 如果用 ξ 表示点数之差的绝对值, 则“ $\xi = i$ ”表示事件“点数之差的绝对值为 i ”, 其中 $0 \leq i \leq 5, i \in N$ 。

问题 6: 指出下列变量的取值

- (1) 江阴长江大桥一天内经过的车辆数量 X ;
- (2) 某无限寻呼台一天内收到寻呼的次数 X ;
- (3) 某工厂加工的某种钢管外径与规定的外径尺寸之差 X ;
- (4) 某射击运动员对目标进行射击, 用 X 表示该运动员在一次射击中的得分;
- (5) 电灯泡的使用寿命。

分析: (1) (2) 变量取值为自然数,

(3) 变量取值为误差范围,

(4) 变量取值为 $0 \sim 10$ 的自然数,

(5) 变量取值为 $[0, +\infty)$ 。

所有取值可以一一列出的随机变量称为离散型随机变量, 比如 (1) (2) (4), 而 (3) (5) 称为连续型随机变量。

问题 7: 能否根据 (5) 中情境, 恰当定义某一随机变量, 使得它为离散型随机变量?

一般地, 对于灯泡的寿命有一个期望值, 假设为 $1000h$, 定义 $Y = \begin{cases} 1, & \text{寿命} \geq 1000 \\ 0, & \text{寿命} < 1000 \end{cases}$, 则随机变量 Y 为离散型随机变量, 这样定义更有实际意义。

(三) 回归问题

问题 5 的解答: 用 ξ 表示点数之差的绝对值, 则 ξ 的所有可能取值为 $0, 1, 2, 3, 4, 5$ 。

试验的所有结果为:

$(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$
 $(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$
 $(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$
 $(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$
 $(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$
 $(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)$

共 36 个。其中 $\xi = 0$ 包含 6 个基本事件, $\xi = 1$ 包含 10 个基本事件,

$\xi = 2$ 包含 8 个基本事件, $\xi = 3$ 包含 6 个基本事件,

$\xi = 4$ 包含 4 个基本事件, $\xi = 5$ 包含 2 个基本事件。

$$\begin{aligned} \therefore P(\xi = 0) &= \frac{1}{6}, P(\xi = 1) = \frac{5}{18}, \\ P(\xi = 2) &= \frac{2}{9}, P(\xi = 3) = \frac{1}{6}, \\ P(\xi = 4) &= \frac{1}{9}, P(\xi = 5) = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

(为了简洁呈现, 可类似函数的三种形式之一来表示, 常选表格形式——分布列)

$\therefore \xi$ 的分布列为:

ξ	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

一般地，表格

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

称为离散型随机变量 X 的概率分布列，简称为 X 的分布列，也可以用解析式或图象表示。

(四) 深入探究

问题 8：分布列具有什么性质？

观察思考之后，归纳出两条性质

(1) $p_i \geq 0, i=1, 2, \cdots, n;$

(2) $\sum_{i=1}^n p_i = 1。$

(五) 概念理解

例 1 抛掷两枚骰子各一次，记第一次掷出的点数与第二次掷出的点数差为 X ，则“ $X > 4$ ”表示的试验结果是_____。(6,1)

例 2 随机变量 ξ 所有可能的取值为 1, 2, 3, 4, 5，且 $P(\xi = k) = ck$ ，则常数 $c = \underline{\hspace{2cm}}$, $P(2 \leq \xi \leq 4) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析： $\because c + 2c + 3c + 4c + 5c = 1, \therefore c = \frac{1}{15}$

$$P(2 \leq \xi \leq 4) = 2c + 3c + 4c = 9c = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

(六) 课堂小结

知识：离散型随机变量及分布列的概念和性质；

数学思想方法：模型、归纳等。