

二项式定理的应用拓展提升答案

1. 求证: $3^{2n+2}-8n-9(n \in \mathbb{N}^*)$ 能被 64 整除.

【思路启迪】问题的关键是要找出幂 3^{2n+2} 被 64 除的系数, 联系到二项式定理, 3^{2n+2} 可写成 $(8+1)^{n+1}$ 展开后代入求证式有望解决问题.

【证明】 $3^{2n+2}-8n-9=(1+8)^{n+1}-8n-9$

$$=1+C_{n+1}^1 \cdot 8+C_{n+1}^2 \cdot 8^2+\cdots+C_{n+1}^{n+1} 8^{n+1}-8n-9$$

$$=C_{n+1}^2 \cdot 8^2+C_{n+1}^3 \cdot 8^3+\cdots+C_{n+1}^{n+1} \cdot 8^{n+1}.$$

而 $C_{n+1}^2, C_{n+1}^3, \cdots, C_{n+1}^{n+1}$ 均为自然数, 上式各项均为 64 的整数倍, $\therefore 3^{2n+2}-8n-9$ 能被 64 整除.

【小结】解决利用二项式定理证明整除问题关键是判断所证式子与除数之间的联系, 要掌握好对式子的拆分, 这是利用二项式定理证明整除问题的常用技巧.

2. 求 $(x^2+x+y)^5$ 的展开式中 x^5y^2 的系数.

【解法一】将 x^2+x+y 中 2 项看成一项, 利用二项式定理求解

分析: 令: $a=x^2+x, b=y$, 利用二项式通项公式 x^5y^2 这样的项只能是在 $C_5^2(x^2+x)^3y^2$ 中得到,

$$(x^2+x)^3 \text{ 的通项公式 } T_{k+1}=C_3^k(x^2)^{3-k}x^k=C_3^kx^{6-k},$$

令 $6-k=5$, 解的 $k=1$

所以 展开式中 x^5y^2 的系数是 $C_5^2C_3^1=30$.

【解法二】根据多项式相乘法则

分析: 要得到 x^5y^2 这样的项, 需要在 5 项中选 2 个选取 y , 剩下的 3 项中选定 2 个取 x^2 , 1 个选取 x 相乘

就可以得到 x^5y^2 , 根据分步乘法原理, 这些项共有 $C_5^2C_3^2C_1^1$ 种选法, 因此系数为 $C_5^2C_3^2=30$.

3. 求 $(\sqrt{x}+1)^6(2x-1)^5$ 展开式中 x^6 系数.

【解法一】分别把两个二项式展开;

【解法二】利用二项式的通项公式求解

$$\text{二项式 } (\sqrt{x}+1)^6 \text{ 的通项公式是: } T_{k+1}=C_6^k(\sqrt{x})^{6-k} \cdot 1^k=C_6^k x^{\frac{6-k}{2}}, k \in \{0,1,2,3,4,5,6\},$$

$$\text{二项式 } (2x-1)^5 \text{ 的通项公式是: } T_{r+1}=C_5^r \cdot (2x)^{5-r} \cdot (-1)^r=C_5^r \cdot (-1)^r \cdot 2^{5-r} x^{5-r}, r \in \{0,1,2,3,4,5\},$$

$\therefore (\sqrt{x}+1)^6(2x-1)^5$ 展开式的通项公式是:

$$T_{k+1} \cdot T_{r+1}=C_6^k x^{\frac{6-k}{2}} \cdot C_5^r (-1)^r \cdot 2^{5-r} \cdot x^{5-r}$$

$$=C_6^k \cdot C_5^r (-1)^r \cdot 2^{5-r} \cdot x^{8-\frac{k}{2}-r}$$

$$\text{令 } 8 - \frac{k}{2} - r = 6,$$

$$\text{因此: } \frac{k}{2} + r = 2, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\therefore (1) \quad k=4, r=0 \text{ 时, } T_5 \cdot T_1 = C_6^4 \cdot C_5^0 (-1)^0 \cdot 2^5 \cdot x^6 = 480x^6$$

$$(2) \quad k=2, r=1 \text{ 时, } T_3 \cdot T_2 = C_6^2 \cdot C_5^1 (-1)^1 \cdot 2^4 \cdot x^6 = -1200x^6$$

$$(3) \quad k=0, r=2 \text{ 时, } T_1 \cdot T_3 = C_6^0 \cdot C_5^2 (-1)^2 \cdot 2^3 \cdot x^6 = 80x^6$$

所以, $(\sqrt{x}+1)^6(2x-1)^5$ 展开式中 x^6 系数是 -640 .

小结: 对于较为复杂的二项式与二项式乘积利用两个通项之积比较方便运算.