二项式定理的应用学习指南

一、学习目标

1. 会熟练计算二项展开式中的指定项（如常数项、有理项等），掌握二项式系数的性质，能对二项式系数进行应用；

2. 能把杨辉三角与二项式系数性质结合起来，会解决最值问题和二项式系数求和问题；

3. 能够在特例的基础上归纳并形成简单的数学命题，体验特殊到一般，具体到抽象的数学思想，提升数学抽象的核心素养.

二、学法指导

学习重点是用二项式定理及其二项式系数的性质解决问题，难点在于用二项式系数的性质解决最值问题，体会用函数思想解决系数和问题.

三、教学过程

【环节一】知识回顾

1．二项式定理

(1) 公式 $(a+b)^n$ ＝____________________________________ $(n\in N^*)$ 叫做二项式定理.

(2) $(a+b)^n$ 的二项展开式共有________项，其中各项的系数 $C_n^k(k\in\{0,1,2,\cdots,n\})$ 叫做二项式系数.

2．二项展开式的通项

$(a+b)^n$ 的二项展开式中的__________叫做二项展开式的通项，用__________表示，即通项为展开式的第______项：____________________.

3. “杨辉三角”与二项式系数的性质：

（1）对称性： 与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等；

（2）增减性与最大值：

$$\mathrm{C}_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k\cdot(k-1)!}$$

$$=\mathrm{C}_n^{k-1}\cdot\frac{n-k+1}{k}$$

最值情况：当 n 为偶数时，中间一项的二项式系数 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 取得最大值；

当 n 为奇数时，中间两项的二项式系数 $C_n^{\frac{n-1}{2}}=C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 且同时取得最大值。

（3）各二项式系数的和： $2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$.

【环节二】自主探究

【典型例题】

例 1. 已知二项式$(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$，求：

(1) 二项展开式的常数项；

(2) 展开式中含x^5项的二项式系数和系数；

(3) 含x的整数次幂的项的个数.

【思路启迪】利用已知条件，根据特定项的特征逐一求解.

解：已知二项展开式的通项$T_{k+1}=C_{10}^{k}(\frac{1}{2}x^2)^{10-k}(-\frac{1}{\sqrt{x}})^k=C_{10}^{k}(-1)^k(\frac{1}{2})^{10-k}x^{20-\frac{5}{2}k}$.

(1) 因为所求为常数项，即$20-\frac{5}{2}k=0$时，解得$k=8$，

所以，常数项为$C_{10}^{8}(-1)^8(\frac{1}{2})^2=\frac{45}{4}$.

(2) 令$20-\frac{5}{2}k=5$，得$k=\frac{2}{5}(20-5)=6$，

含x^5的项的二项式系数为$C_{10}^{6}=C_{10}^{4}=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$，

所以x^5的系数为$C_{10}^{6}(-1)^6(\frac{1}{2})^4=\frac{105}{8}$.

(3) 二项展开式的通项$T_{k+1}=C_{10}^{k}(\frac{1}{2}x^2)^{10-k}(-\frac{1}{\sqrt{x}})^k=C_{10}^{k}(-1)^k(\frac{1}{2})^{10-k}x^{20-\frac{5}{2}k}$.

因此，$20-\frac{5}{2}k=\frac{40-5k}{2}$为整数，只需$k$为偶数，所以$k=0,2,4,6,8,10$，故符合要求的有6项，分别为展开式的第1,3,5,7,9,11项.

小结：

(1) 记准、记熟二项式$(a+b)^n$的展开式，是解答好与二项式有关问题的前提条件.

(2) 求展开式中的某些特定项时，应先利用通项确定哪些项是要求的项，再用通项求解.

(3) 要注意二项式系数与某一指定项的系数的差别.

例 2. 在$\left(x-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$的展开式中，求：

（1）二项式系数最大的项；

（2）系数绝对值最大的项；

（3）系数最大的项；

解：二项式$\left(x-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$展开式的通项公式：

$T_{k+1}=C_5^k x^{5-k}(-\dfrac{2}{\sqrt{x}})^k=C_5^k(-2)^k x^{5-\frac{3}{2}k}$，$k\in\{0,1,2,\cdots,5\}$

（1）当$k=2$或3时，二项式系数最大$C_5^2=C_5^3=10$，

即：$T_3=80x^2,T_4=-40x^{\frac{1}{2}}$.

（2）设系数绝对值最大的项为第$r+1$项，$r\in\{0,1,2,\cdots,5\}$

则$\begin{cases}C_5^r 2^r\ge C_5^{r-1}2^{r-1}\\ C_5^r 2^r\ge C_5^{r+1}2^{r+1}\end{cases}$，

利用组合数公式计算：$\begin{cases}\dfrac{5!}{r!\cdot(5-r)!}\times 2\ge\dfrac{5!}{(r-1)!\cdot(6-r)!}\\ \dfrac{5!}{r!\cdot(5-r)!}\ge\dfrac{5!}{(r+1)!\cdot(4-r)!}\times 2\end{cases}$，

化简得：$\begin{cases}\dfrac{2}{r}\ge\dfrac{1}{6-r}\\ \dfrac{1}{5-r}\ge\dfrac{2}{r+1}\end{cases}$，解得$3\le r\le 4$，

因为$r\in\{0,1,2,\cdots,5\}$，所以$r=3$或4，

∴系数绝对值最大的项为$T_4=C_5^3\cdot(-2)^3x^{5-\frac{9}{2}}=-80x^{\frac{1}{2}},T_5=C_5^4\cdot(-2)^4x^{-1}=80x^{-1}$.

（3）因为$b=-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$，所以展开式各项的系数正负交替，由（2）可知，系数绝对值最大的项是

$T_4=-80x^{\frac{1}{2}},T_5=80x^{-1}$，

因此，展开式中系数最大的项为$T_5=C_5^4(-2)^4x^{5-\frac{3}{2}\times 4}=80x^{-1}$.

例 3．已知$(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$，求：

（1）$a_1+a_2+\cdots+a_7$；

（2）$a_1+a_3+a_5+a_7$；

（3）$|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_7|$.

解：(1) 当$x=0$时，$a_0=1$；

当$x=1$时，$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7=-1$，

所以 $a_1+a_2+-\cdots+a_7=-2$；

（2）当$x=-1$时，$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_7=3^7$, ①

因为 $a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7=-1$，②

解得：$a_1+a_3+a_5+a_7=-\dfrac{1+3^7}{2}$；

（3）根据二项展开式的通项公式，$T_{k+1}=C_7^k(-2x)^k=C_7^k(-2)^kx^k$，

k为偶数时，$a_k>0$，k为奇数时，$a_k<0$，其中$k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

所以 $|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_7|=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7=3^7$.

【环节三】总结提炼

1．正确理解二项式定理，准确写出二项展开式及通项，注意区分项的系数与二项式系数.

2．掌握“杨辉三角”与二项式系数的三大性质：对称性；增减性和最值；各二项式系数的和：$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$.

3．本节课涉及到的数学思想：特殊到一般，具体到抽象.