

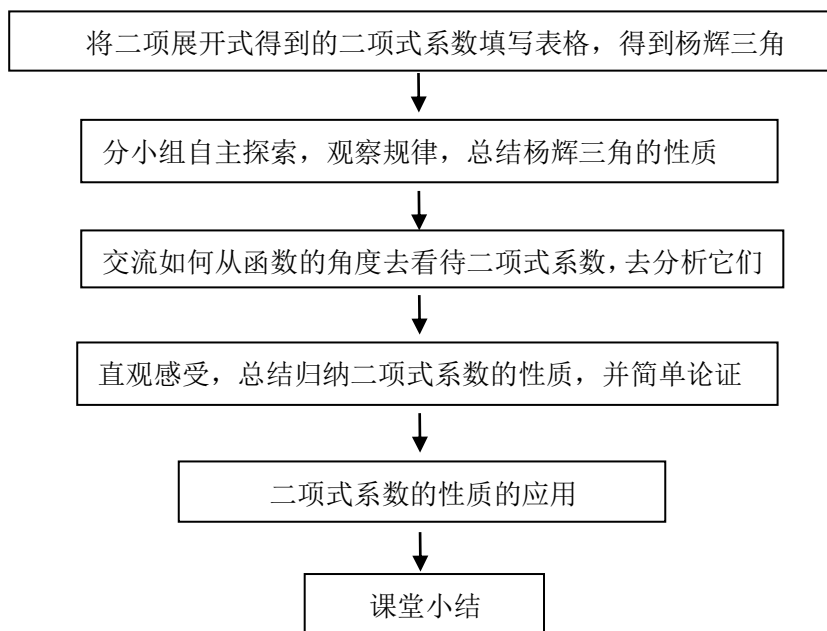
杨辉三角与二项式系数的性质学习指南

【学习目标】

- 1.通过杨辉三角，了解中华优秀传统文化中的数学成就，体会其中的数学文化；
- 2.通过从函数的角度研究二项式系数的性质，建立知识的前后联系，体会用函数知识研究问题的方法，发展直观想象与逻辑推理核心素养；
- 3.通过“观察发现规律、寻找联系、探究证明、性质应用”自主学习探究的过程，熟悉二项式系数的一些性质，体会数形结合、从特殊到一般、赋值法等数学思想方法解决问题的再创造过程；
- 4.通过问题解决，形成问题意识，激发探索研究我国古代数学相关知识的热情，加深对数学知识本质的理解.

【学法指导】

前面我们学习了组合数与二项式定理，二项展开式中二项式系数可以看做一个数列，而数列又是一种函数，所以在研究二项式系数的性质时应该从函数的角度去研究。



【学习过程】

【复习回顾】1. 二项式定理及其特例：

$$(1) (a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n (n \in N^*),$$

$$(2) (1+x)^n = 1 + C_n^1 x + \cdots + C_n^r x^r + \cdots + x^n.$$

2. 二项展开式的通项: $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$.

任务一: 用计算器计算 $(a+b)^n$ 展开式的二项式系数并填入下表

$n \backslash$	$(a+b)^n$ 展开式的二项式系数						
1							
2							
3							
4							
5							
6							

通过计算填表,你发现了什么规律? 为了便于直观感受规律,你能换一种表示形式吗?

$$(a+b)^1 \cdots \cdots 1 \quad 1$$

$$(a+b)^2 \cdots \cdots 1 \quad 2 \quad 1$$

$$(a+b)^3 \cdots \cdots 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$(a+b)^4 \cdots \cdots 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

$$(a+b)^5 \cdots \cdots 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

$$(a+b)^6 \cdots \cdots 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$

预案 1. 每一行的系数具有对称性;

预案 2. 在同一行中, 每行两端都是 1;

预案 3. 相邻两行中, 除 1 以外的每一个数都等于它“肩上”两个数的和.

任务二: 右表是我国南宋数学家杨辉在 1261 年所著的《详解九章算术》一书中出现的, 称为杨辉三角, 比法国数学家帕斯卡发现的表要早五百年左右, 观察图形与我们上面得到的数据有什么联系? 探究其中包含的规律(性质).

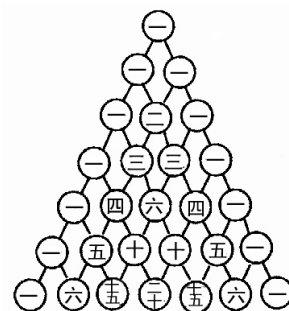
各小组可以畅谈查询得到的对“杨辉三角”的了解与认识, 展示探究与发现的成果——杨辉三角的性质

预案:

1. 每行两端的数都是 1;

2. 第 n 行的数字有 n 个;

3. 第 n 行的第 m 个数可表示为 C_{n-1}^{m-1} , 且 $(a+b)^n$ 的展开式中的各项系数依次对应杨辉三



角的第 $n+1$ 行中的各项;

4. 每行数字左右对称, 即第 n 行的第 m 个数与第 n 行的第 $n-m+1$ 个数相等, 每行数字都是先增大后减小;

5. 相邻两行中, 除 1 以外的每一个数都等于它“肩上”两个数的和。即第 $n+1$ 行的第 i 个数等于第 n 行的第 $i-1$ 个数与第 i 个数的和, 可表示为 $C_n^i = C_{n-1}^{i-1} + C_{n-1}^i$, 其中 $2 \leq i \leq n$, 可以用此性质写出整个杨辉三角;

6. 第 n 行数字和为 2^{n-1} 。

任务三: $(a+b)^n$ 的展开式中的各项系数依次对应杨辉三角的第 $n+1$ 行中的各项, 那么

$(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数具有杨辉三角同行中的规律——对称性与增减性, 那么你能简单叙述并证明吗?

问题 1: $(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数是 $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$. 其中 C_n^r 可以看成是以 r 为自变量的函数 $f(r) = C_n^r$ 吗? 它的定义域是什么?

预案: 定义域是 $\{0, 1, 2, \dots, n\}$

问题 2: 画出 $n=6$ 和 $n=7$, $n=8$ 时的函数图象, 观察图象分析它们之间有哪些异同? 分析它们是否具有对称性和增减性, 有没有最大值?

预案: 它们都是一些孤立的点, 都具有对称性, 都是先增大后减小, 有最大值; 只是 $n=7$ 时中间有两个值相等且最大, $n=6$ 和 $n=8$ 是中间那个值最大.

问题 3: 结合杨辉三角和所画图象说明二项式系数的性质.

预案: (1)对称性. 与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等

($C_n^m = C_n^{n-m}$).

直线 $r = \frac{n}{2}$ 是图象的对称轴.

(2)增减性与最大值.

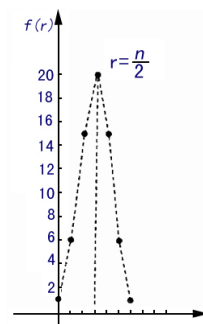
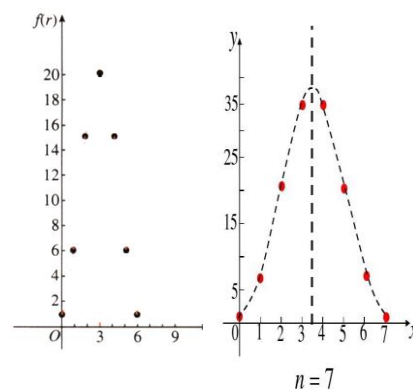
$$\therefore C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = C_n^{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k},$$

$\therefore C_n^k$ 相对于 C_n^{k-1} 的增减情况由 $\frac{n-k+1}{k}$ 决定,

$$\frac{n-k+1}{k} > 1 \Leftrightarrow k < \frac{n+1}{2},$$

当 $k < \frac{n+1}{2}$ 时, 二项式系数逐渐增大. 由对称性知它的后半部分是逐渐减小的, 且在中间取得最大值;

当 n 是偶数时, 中间一项 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 取得最大值; 当 n 是奇数时, 中间两项 $C_n^{\frac{n-1}{2}}$, $C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 取得



最大值.

(3)各二项式系数和:

已知 $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + \cdots + C_n^rx^r + \cdots + C_n^nx^n$,

令 $x=1$, 则 $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^r + \cdots + C_n^n$.

这就是说, $(a+b)^n$ 的展开式的各个二项式系数的和等于 2^n 。

问题 4: 利用二项式系数的这些性质我们可以解决哪些问题? 你能举例说明吗?

任务四: 二项式系数性质的应用

1. 写出在 $(a-b)^7$ 的展开式中二项式系数最大的项?

【分析】因为 $n=7$, 所以二项式系数最大为 $C_7^3 = C_7^4 = 35$, 对应的是展开式中的第 4 项

$T_4 = C_7^3 a^4 (-b)^3 = -35a^4 b^3$ 和第 5 项 $T_5 = C_7^4 a^3 (-b)^4 = 35a^3 b^4$.

2. 试证: 在 $(a+b)^n$ 的展开式中, 奇数项的二项式系数的和等于偶数项的二项式系数的和.

【分析】: 展开式中奇数项的二项式系数和为 $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots$, 偶数项的二项式系数和为

$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots$. 由于 $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^n b + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n (n \in N^*)$ 其

中的 a, b 可以取任意实数, 因此我们可以通过对 a, b 适当赋值来得到奇数项的二项式系数的和、偶数项的二项式系数的和.

证明: 在展开式 $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^n b + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n (n \in N^*)$ 中, 令

$a=1, b=-1$, 则 $(1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n$,

即 $0 = (C_n^0 + C_n^2 + \cdots) - (C_n^1 + C_n^3 + \cdots)$,

$\therefore C_n^0 + C_n^2 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots$,

即在 $(a+b)^n$ 的展开式中, 奇数项的二项式系数的和等于偶数项的二项式系数的和.

说明: 由性质(3)及例 2 知 $C_n^0 + C_n^2 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots = 2^{n-1}$.

小结: 此题我们如果联想到 $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + \cdots + C_n^rx^r + \cdots + C_n^nx^n$, 从函数的角

度去看即 $f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + \cdots + C_n^rx^r + \cdots + C_n^nx^n$, 那么可以得到 $f(-1) = 0$ 从而得到结论.

3. 已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第 4 项与第 8 项的二项式系数相等, 则奇数项的二项式系数和为 ____

【分析】因为 $(1+x)^n$ 的展开式中第4项与第8项的二项式系数相等，所以 $C_n^3 = C_n^7$ ，解得

$n=10$ ，所以二项式 $(1+x)^{10}$ 中奇数项的二项式系数和为 $\frac{1}{2} \times 2^{10} = 2^9$ 。

【学习小结】

1. 二项展开式中的二项式系数都是一些特殊的组合数，它有三条性质，要理解和掌握好，同时要注意“系数”与“二项式系数”的区别，不能混淆，只有二项式系数最大的才是中间项，而系数最大的不一定是中间项，尤其要理解和掌握“取特值”法，它是解决有关二项展开式系数的问题的重要手段；

2. 从函数的角度去看待二项式系数的图象与性质，体会用函数知识研究问题的方法。

引申拓展：关于“杨辉三角”你还能发现什么秘密？

预案1.把每一行看做一个具体的数，那么这些数字从上往下构成了一个怎样的数列？

——公比为11的等比数列；

预案2.

如图，写出斜线上各行数字的和，这就是著名的斐波那契数列，

