

二项式定理拓展提升任务答案

1. $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 的展开式中, x^4 的系数是 135.

【解析】方法一:

$(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 展开式中, x^4 的系数是 $(1-x)^{10}$ 展开式中 x^4, x^3, x^2 三项的系数和.

即:

$$\begin{aligned} & C_{10}^4(-1)^4 + C_{10}^3(-1)^3 + C_{10}^2(-1)^2 \\ &= C_{10}^4 - C_{10}^3 + C_{10}^2 \\ &= 135 \end{aligned}$$

方法二:

$(1+x+x^2)(1-x)^{10} = [(1+x+x^2)(1-x)](1-x)^9 = (1-x^3)(1-x)^9$ 展开式的 x^4 系数是

$(1-x)^9$ 展开式中 x^4, x 两项的系数和, 即 $C_9^4 + C_9^1 = 135$.

2. 在 $(1-2x)^7$ 的展开式中, 各项系数和是 -1.

【解析】令 $x=1$ 代到展开式 $(1-2x)^7 = C_7^0 + C_7^1(-2x)^1 + C_7^2(-2x)^2 + \cdots + C_7^7(-2x)^7$

$$\text{得: } (1-2)^7 = C_7^0 + C_7^1(-2)^1 + C_7^2(-2)^2 + \cdots + C_7^7(-2)^7$$

各项系数和是 -1.

3. 用二项式定理证明 $55^{55} + 9$ 能被 8 整除.

证明:

$$\begin{aligned} 55^{55} + 9 &= (56-1)^{55} + 9 \\ &= C_{55}^0 56^{55} + C_{55}^1 56^{54}(-1)^1 + C_{55}^2 56^{54}(-1)^2 + \cdots + C_{55}^k 56^{54}(-1)^k + \cdots + C_{55}^{55}(-1)^{55} + 9 \end{aligned}$$

$$\because C_{55}^k 56^{55-k}(-1)^k = C_{55}^k 8^{55-k} \cdot 7^{55-k}(-1)^k \quad (k=0,1,2,\cdots,54), \text{ 均能被 } 8 \text{ 整除,}$$

而 $C_{55}^{55}(-1)^{55} + 9 = -1 + 9 = 8$ 也能被 8 整除,

$\therefore C_{55}^0 56^{55} + C_{55}^1 56^{54}(-1)^1 + C_{55}^2 56^{54}(-1)^2 + \cdots + C_{55}^k 56^{54}(-1)^k + \cdots + C_{55}^{55}(-1)^{55} + 9$ 能被 8 整除,

即: $55^{55} + 9$ 能被 8 整除.