

排列组合应用第2课时拓展提升任务答案

拓展内容:

1 3个女生和5个男生排成一排.

(1)如果女生必须全排在一起,有多少种不同的排法?

(2)如果女生必须全分开,有多少种不同的排法?

(3)如果两端都不能排女生,有多少种不同的排法?

(4)如果两端不能都排女生,有多少种不同的排法?

(5)如果甲必须排在乙的右面(可以不相邻),有多少种不同的排法?

考点 排列的应用 题点 有限制条件的排列问题

解 (1)(捆绑法)因为3个女生必须排在一起,所以可先把她们看成一个整体,这样同5个男生合在一起共有6个元素,排成一排有 A_6^6 种不同排法.对于其中的每一种排法,3个女生之间又有 A_3^3 种不同的排法,因此共有 $A_6^6 \cdot A_3^3 = 4\,320$ (种)不同的排法.

(2)(插空法)要保证女生全分开,可先把5个男生排好,每两个相邻的男生之间留出一个空,这样共有4个空,加上两边两个男生外侧的两个位置,共有6个位置,再把3个女生插入这6个位置中,只要保证每个位置至多插入一个女生,就能保证任意两个女生都不相邻.由于5个男生排成一排有 A_5^5 种不同的排法,对于其中任意一种排法,从上述6个位置中选出3个来让3个女生插入有 A_6^3 种方法,因此共有 $A_5^5 \cdot A_6^3 = 14\,400$ (种)不同的排法.

(3)方法一 (特殊位置优先法)因为两端不能排女生,所以两端只能挑选5个男生中的2个,有 A_5^2 种不同排法,对于其中的任意一种排法,其余六位都有 A_6^6 种排法,所以共有 $A_5^2 \cdot A_6^6 = 14\,400$ (种)不同的排法.

方法二 (间接法)3个女生和5个男生排成一排共有 A_8^8 种不同的排法,从中扣除女生排在首位的 $A_3^3 \cdot A_7^7$ 种排法和女生排在末位的 $A_3^3 \cdot A_7^7$ 种排法,但这样两端都是女生的排法在扣除女生排在首位时被扣去一次,在扣除女生排在末位时又被扣去一次,所以还需加一次,由于两端都是女生有 $A_3^3 \cdot A_6^6$ 种不同的排法,所以共有 $A_8^8 - 2A_3^3 \cdot A_7^7 + A_3^3 \cdot A_6^6 = 14\,400$ (种)不同的排法.

方法三 (特殊元素优先法)从中间6个位置中挑选出3个让3个女生排入,有 A_6^3 种不同的排法,对于其中的任意一种排法,其余5个位置又都有 A_5^5 种不同的排法,所以共有 $A_6^3 \cdot A_5^5 = 14\,400$ (种)不同的排法.

(4)方法一 因为只要求两端不能都排女生,所以如果首位排了男生,则末位就不再受条件限制了,这样可有 $A_5^1 \cdot A_7^7$ 种不同的排法;如果首位排女生,有 A_3^3 种排法,这时末位就只能排男生,这样可有 $A_3^3 \cdot A_5^1 \cdot A_6^6$ 种不同的排法.

因此共有 $A_5^1 \cdot A_7^7 + A_3^3 \cdot A_5^1 \cdot A_6^6 = 36\,000$ (种)不同的排法.

方法二 3个女生和5个男生排成一排有 A_8^8 种排法,从中扣去两端都是女生的排法有 $A_3^3 \cdot A_6^6$ 种,就能得到两端不都是女生的排法种数.因此共有 $A_8^8 - A_3^3 \cdot A_6^6 = 36\,000$ (种)不同的排法.

(5)(顺序固定问题)因为 8 人排队, 其中两人顺序固定, 共有 $\frac{A_8^8}{A_2^2}=20\ 160$ (种)不同的排法.

反思与感悟 (1)排列问题的限制条件一般表现为: 某些元素不能在某个位置, 某个位置只能放某些元素等. 要先处理特殊元素或先处理特殊位置, 再去排其他元素. 当用直接法比较麻烦时, 可以用间接法, 先不考虑限制条件, 把所有的排列数算出, 再从中减去全部不符合条件的排列数, 这种方法也称为“去杂法”, 但必须注意要不重复, 不遗漏(去尽).

(2)对于某些特殊问题, 可采取相对固定的特殊方法, 如相邻问题, 可用“捆绑法”, 即将相邻元素看成一个整体与其他元素排列, 再进行内部排列; 不相邻问题, 则用“插空法”, 即先排其他元素, 再将不相邻元素排入形成的空位中.

2 为迎接中共十九大, 某校举办了“祖国, 你好”诗歌朗诵比赛. 该校高三年级准备从包括甲、乙、丙在内的 7 名学生中选派 4 名学生参加, 要求甲、乙、丙这 3 名学生中至少有 1 人参加, 且当这 3 名学生都参加时, 甲和乙的朗诵顺序不能相邻, 那么选派的 4 名学生不同的朗诵顺序的种数为()

A. 720 B. 768 C. 810 D. 816

考点 排列的应用 **题点** 有限制条件的排列问题

答案 B

解析 根据题意, 在 7 名学生中选派 4 名学生参加诗歌朗诵比赛, 有 $A_7^4=840$ (种)情况, 其中甲、乙、丙都没有参加, 即选派其他四人参加的情况有 $A_4^4=24$ (种), 则甲、乙、丙这 3 名学生中至少有 1 人参加的情况有 $840-24=816$ (种); 其中当甲乙丙都参加且甲和乙相邻的情况有 $C_4^1A_2^2A_3^3=48$ (种), 则满足题意的朗诵顺序有 $816-48=768$ (种). 故选 B.