

高一数学第 50 课时向量小练习讲评的拓展提升作业（答案）

1. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，点 E 是 AB 边上的动点，则 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CB}$ 的值为_____；

$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC}$ 的最大值为_____.

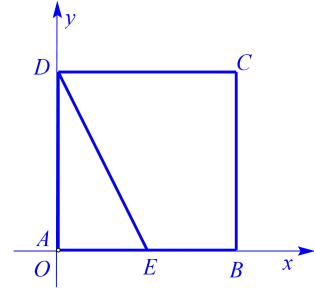
【解析】解法 1（坐标法）以射线 AB, AD 为 x 轴， y 轴的正方向建立平面直角坐标系，则 $A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1)$ ，

设 $E(t,0)$ ， $t \in [0,1]$ ，则 $\overrightarrow{DE} = (t,0)$ ， $\overrightarrow{CB} = (0,-1)$ ，

所以 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CB} = (t,-1) \cdot (0,-1) = 1$.

因为 $\overrightarrow{DC} = (1,0)$ ，

所以 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = (t,-1) \cdot (1,0) = t \leq 1$.



所以 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC}$ 的最大值为 1.

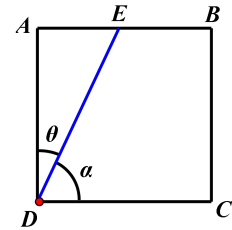
【解析】解法 2（意义法）由图知，无论 E 点在哪个位置， $\overrightarrow{DE}$ 在 $\overrightarrow{CB}$ 方向上的投影都是 $CB = 1$ ，

所以 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CB}| \cdot 1 = 1$.

当 E 运动到 B 点时，

$\overrightarrow{DE}$ 在 $\overrightarrow{DC}$ 方向上的投影最大即为 $DC = 1$ ，

所以 $(\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC})_{\max} = |\overrightarrow{DC}| \cdot 1 = 1$.



【解析】解法 3（转化法）

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CB}$$

$$= (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) \cdot \overrightarrow{DA}$$

$$= \overrightarrow{DA}^2 + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DA}$$

$$= 1$$

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC}$$

$$= (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) \cdot \overrightarrow{DC}$$

$$= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DC}$$

$$= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$= \overrightarrow{OB}^2$$

$$= 1$$

【方法总结】求两个向量的数量积有三种方法：利用定义；利用向量的坐标运算；利用数量积的几何意义.

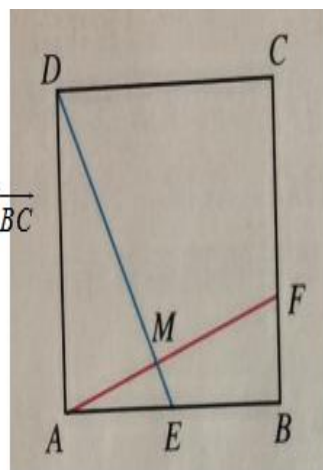
2.如图，正方形 ABCD 的边长为 a，E 是 AB 的中点，F 是 BC 边上的三等分点，AF 与 DE 交于点 M，求 $\angle EMF$ 的余弦值.

$$\begin{aligned} \text{解: } \because \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF} &= (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) \\ &= \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} \right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \right) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}^2 + \frac{1}{6} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

$$\text{而 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = a^2,$$

并且 $\angle EMF$ 的大小等于 $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AF}$ 的夹角.

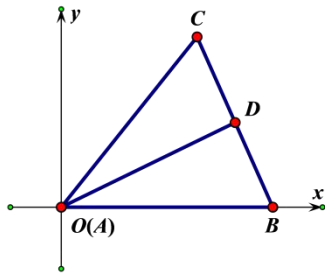
$$\begin{aligned} \because \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF} &= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{6}, \\ |\overrightarrow{DE}| &= \frac{\sqrt{5}}{2} a, |\overrightarrow{AF}| = \frac{\sqrt{10}}{3} a, \end{aligned} \quad \text{所以 } \cos \angle EMF = \cos \theta = \frac{\frac{a^2}{6}}{\frac{\sqrt{5}}{2} a \times \frac{\sqrt{10}}{3} a} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$



3.已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 3$ ， D 为边 BC 上一点， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 6$ ， $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{15}{2}$ ，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{9}{2}$

【解析】以 A 为原点，以 AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，



设 $D(x, y)$ ，则 $\overrightarrow{AD} = (x, y)$ ，

$\because AB = AC = 3$ ，记 $\angle BAC = \theta$ ，

$\therefore A(0, 0)$ ， $B(3, 0)$ ， $C(3 \cos \theta, 3 \sin \theta)$ ，

则 $\overrightarrow{AB} = (3, 0)$ ， $\overrightarrow{AC} = (3 \cos \theta, 3 \sin \theta)$ ，

$\because \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 6$ ， $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{15}{2}$ ，

$\therefore 3x = 6$ ， $3x \cos \theta + 3y \sin \theta = \frac{15}{2}$ ，

$\therefore x = 2$ ， $2 \cos \theta + y \sin \theta = \frac{5}{2}$ ，

又 D 为边 BC 上一点，

$\therefore \overrightarrow{BD} \parallel \overrightarrow{BC}$ ，则 $(3 \cos \theta - 3)y + 3 \sin \theta = 0$ ，即 $\sin \theta = y(1 - \cos \theta)$ ，

又 $\theta \in (0, \pi)$ ，

$\therefore y = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$

$\therefore 2 \cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} = 2 \cos \theta + 1 + \cos \theta = \frac{5}{2}$ ，解得 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9 \cos \theta = \frac{9}{2}$ ，

故答案为： $\frac{9}{2}$ 。