

平面向量的典型例题讲解学习指南

一、学习目标：

1. 理解平面向量的共线向量的概念，初步掌握数量积公式的应用；
2. 通过对高考题目的分析，尝试着找出知识点间的联系，体会平面向量概念与逻辑推理相结合的考察方式，感受数形结合的数学思想

二、学法指导：

1. 本节课以平面向量的高考题目出发，引导学生对题目里涉及到的知识进行分析，并能总结出一些平时学习中忽略点
2. 进一步理解向量的共线的概念和向量的数量积公式的应用。

三、任务学习单

任务一：回顾本章的学习内容

6.1平面向量的概念	6.2平面向量的运算	6.3平面向量的基本定理和坐标表示	6.4平面向量的应用
6.1.1 向量的实际背景与概念 6.1.2 向量的几何表示 6.1.3 相等向量与共线向量	6.2.1 向量的加法运算 6.2.2 向量的减法运算 6.2.3 向量的数乘运算 6.2.4 向量的数量积	6.3.1 平面向量的基本定理 6.3.2 平面向量的正交分解及坐标表示 6.3.3 平面向量的加减运算的坐标表示 6.3.4 平面向量的数乘运算的坐标表示 6.3.5 平面向量的数量积的坐标表示	6.4.1 平面几何中的向量方法 6.4.2 向量在物理中的应用举例 6.4.3 正余弦定理

任务二、典型例题分析

一、近几年北京高考的考察方式

15年北京文6	设 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 是非零向量，“ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} $ ”是“ $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ ”的（ ）. (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
16年北京理4	设 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 是向量，则“ $ \mathbf{a} = \mathbf{b} $ ”是“ $ \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{b} $ ”的 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

17年北京理6文7	设 m, n 为非零向量, 则“存在负数 λ, 使得 $m = \lambda n$”是“$m \cdot n < 0$”的 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
18年北京理6	设 a, b 均为单位向量, 则“$a - 3b = 3a + b$”是“$a \perp b$”的 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
19年北京理7	设点 A, B, C 不共线, 则“$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为锐角”是“$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} > \overrightarrow{BC}$”的() (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

二、下面重点分析 15 年和 18 年的两道题。

【例 1】(15 年北京文 6) 设 a, b 是非零向量, “ $a \cdot b = |a||b|$ ”是“ $a // b$ ”的()。

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
- (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

分析:

问题 1: 这道题涉及到平面向量的哪些知识? (学生思考)

知识点: $a \cdot b = |a||b|\cos\theta$; 共线向量的概念: 方向相同和相反的非零向量。

问题 2: 这两个概念间有联系吗?

当两个向量是同向的共线时, 两个向量的夹角是 0 , 此时 $a \cdot b = |a||b|\cos 0 = |a||b|$;

当两个向量是反向的共线时, 两个向量的夹角是 π , 此时 $a \cdot b = |a||b|\cos \pi = -|a||b|$;

【解析】由 $a \cdot b = |a||b|$, 可以得出两向量夹角是 0 , 所以可以得出 $a // b$; 当 $a // b$ 时两个向量 a, b 可能是反向, 所以不一定就有 $a \cdot b = |a||b|$. 所以是充分不必要条件, 故选 A.

【例 2】（18 年北京理 6）设 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{b}$ 是单位向量，则 “ $|\mathbf{a}-3\mathbf{b}|=|3\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ ” 是 “ $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ ” 的（ ）。

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

分析：

问题 1： 这道题考查平面向量的哪些知识？（学生思考）

知识点： $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ ； 向量的模长。

问题 2： 回顾向量的模长的解决方法。

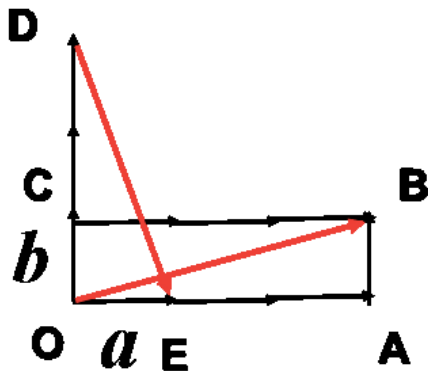
法一、作图

法二、代数法

下面我们先第一种方法再分析这道题

法一作图：

充分性：



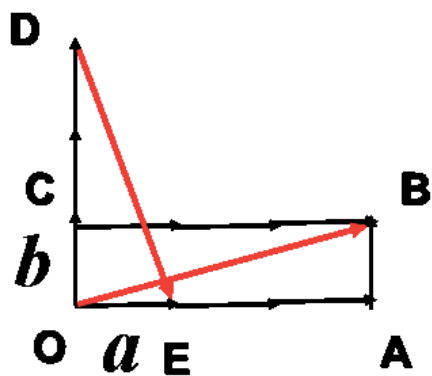
我们把 $\mathbf{a}-3\mathbf{b}=\overrightarrow{DA}$ ， $3\mathbf{a}+\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ ，根据题目的已知 $|\mathbf{a}-3\mathbf{b}|=|3\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ ，也就是 $|\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{OB}|$

接下来，我们只需要判断 $|\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{CA}|$ 。易知 $\triangle ODE\cong\triangle OAC$ ， $\therefore|\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{CA}|$ 推出 $|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{CA}|$

所以平行四边形 $OACB$ 的两条对角线相等，所以平行四边形 $OACB$ 是矩形。进而得到

$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ 。

必要性：



这个很容易得出 $|\overrightarrow{DE}| = |\overrightarrow{OB}|$ 。所以必要性成立。最后选择 C。

法二、代数法

$$\begin{aligned} \because |a-3b| &= |3a+b| \Leftrightarrow |a-3b|^2 = |3a+b|^2 \\ \Leftrightarrow (a-3b)^2 &= (3a+b)^2 \Leftrightarrow \\ |a|^2 - 6a \cdot b + 9|b|^2 &= 9|a|^2 + 6a \cdot b + |b|^2 \\ \therefore a \cdot b &= 0 \therefore a \perp b \text{ 成立.} \end{aligned}$$

所以答案选择 C。

三、课堂小结

1. 本节课对两道平面向量与逻辑推理综合的高考题目做了详细分析；
2. 在分析的过程中找出知识点间的联系，感受平面向量的几何与代数的特征，体会数形结合的数学思想。