

## 与生活实际相关的问题第 6 课时学习指南

### 一、学习目标：

1. 通过具体实例，类比排列，观察归纳出组合的概念，体会组合与排列的区别与联系，会判断一个问题是组合问题还是排列问题；
2. 根据组合与排列的关系，推导组合数公式，能解决一些简单的组合问题，进一步体会分步与分类两个计数原理的运用；
3. 在学习过程中，感受探索数学知识的魅力，提升数学抽象、逻辑推理、数学运算等核心素养.

### 二、学习任务：

#### （一）温故知新：

什么是排列、排列数？你能写出排列数公式吗？

#### （二）探究新知：

问题 1：从甲、乙、丙 3 名同学中选出 2 名去参加某天的一项活动，其中 1 名同学参加上午的活动，1 名同学参加下午的活动，有多少种不同的选法？

问题 2：从甲、乙、丙 3 名同学中选出 2 名去参加一项活动，有多少种不同的选法？

探究：两个问题有何不同？如果把上面问题中被取的对象称为元素，你能概括一下问题 2 吗？

问题 3 从 1, 2, 3, 4 这 4 个数字中，每次取出 3 个排成一个三位数，共可得到多少个不同的三位数？

问题 4 从 1, 2, 3, 4 这 4 个数字中，每次取出 3 个构成一个集合，共可得到多少个不同的集合？

探究：两个问题有何不同？你能概括一下问题 4 吗？

探究：上述问题 2, 4 的共同特点是什么？你能将它推广到一般情形吗？

### 1. 组合的定义:

一般地, 从  $n$  个不同元素中取出  $m$  ( $m \leq n$ ) 个元素合成一组, 叫做从  $n$  个不同元素中取出  $m$  个元素的一个组合.

思考: 你能说说排列与组合之间的联系与区别吗?

问题 5 判断下列问题是组合问题还是排列问题

- (1) 圆上有 10 个点, 过每 2 个点画一条弦, 一共可以画出多少条弦?
- (2) 某铁路线上有 5 个车站, 则这条铁路线上共需准备多少种车票?
- (3) 8 人聚会, 见面后每 2 人之间要握手相互问候, 共需握手多少次?
- (4) 从 5 本不同的书中选出 4 本, 分给 4 个人每人 1 本, 有多少种不同的方法?
- (5) 从 3, 5, 7, 11 这四个质数中任取两个相乘, 可以得到多少个不相等的乘积?

### 2. 组合数的定义:

从  $n$  个不同元素中取出  $m$  ( $m \leq n$ ) 个元素的所有组合的个数, 叫做从  $n$  个不同元素中取出  $m$  个元素的组合数, 用符号  $C_n^m$  表示.

思考: 你能说出组合数与组合的区别吗?

探究: 从  $a, b, c, d$  这 4 个元素中取 3 个元素的排列数与组合数的关系.

探究: 你能把上述解释推广到一般的情况吗?

### 3. 组合数的公式:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} \quad \text{或} \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (n, m \in N^*, \text{且} m \leq n).$$

规定:  $C_n^0 = 1$ .

探究: 计算  $C_{10}^3$ ,  $C_{10}^7$ , 你有何发现?

### 4. 组合数的性质:

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

组合数还有哪些性质呢? 同学们可以看一下教材中的阅读材料.

### （三）巩固新知

例 1 一位教练的足球队共有 17 名初级学员，他们中以前没有一人参加过比赛，按照足球比赛规则，比赛时一个足球队的上场队员是 11 人.

(1) 这位教练从这 17 名学员中可以形成多少种学员上场方案？

(2) 如果在选出 11 名上场队员时，还要确定其中的守门员，那么教练员有多少种方式做这件事情？

例 2 在 100 件产品中，有 98 件合格品，2 件次品，从这 100 件产品中任意抽出 3 件，

(1) 有多少种不同的抽法？

(2) 抽出的 3 件中恰好有 1 件是次品的抽法有多少种？

(3) 抽出的 3 件中至少有 1 件是次品的抽法有多少种？

### 三、归纳总结：

1. 在解决计数问题时，首先要认真审题弄清楚做什么事；

2. 怎样做才能完成所要做的事，即采取分步还是分类，通常可以按元素性质进行分类，按事情发生的连续过程分步，保证每步独立，达到分类标准明确，分步层次清楚，不重不漏；

3. 确定每一步或每一类是排列问题(有序)还是组合(无序)问题，元素总数是多少以及取出的元素是多少；

4. 对于正面情况较复杂的问题，可以采用间接法，即用无限制条件的总数，减去其反面情况的总数.