

与生活实际相关的问题第 5 课时学习指南

学习目标

1. 通过具体事例的学习抽象概括出排列的概念。
2. 通过对比探究，体会“一个排列”与“排列数”的区别，同时经历排列数公式推导过程，总结排列数公式，学会运用排列数公式。
3. 在学习的过程中，感受排列模型建立过程，提升自己的数学抽象与数学建模的核心素养。

学法指导

通过典型的、学生熟悉的实例抽象概括出原理，理解体会原理的含义。

教学内容

一. 复习引入

(1) **分类加法计数原理**：完成一件事有两类不同方案，在第 1 类方案中有 m 种不同的方法，在第 2 类方案中有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有

$$N = m + n$$

种不同的方法.

(2) **分步乘法计数原理**：完成一件事需要分两个步骤，在第 1 步中有 m 种不同的方法，在第 2 步中有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有

$$N = m \times n$$

种不同的方法.

利用上面的原理，我们今天来介绍一类具有典型特点的计数问题模型——排列

二. 情境导入

先看下面的问题：

问题 1. 从甲、乙、丙 3 名同学中选取 2 名同学参加某一天的一项活动，其中一名同学参加上午的活动，一名同学参加下午的活动，有多少种不同的方法？

问题 2. 从 1, 2, 3, 4 这 4 个数字中, 每次取出 3 个排成一个三位数, 共可得到多少个不同的三位数?

三. 新知探究

1. 排列的概念:

从 n 个不同元素中取 m ($m \leq n$) 个元素按照一定的顺序排成一列, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列。

说明: (1) 排列的定义包括两个方面:

- ① 从不同元素中取出元素,
- ② 按一定的顺序排列;

(2) 两个排列相同的条件:

- ① 元素完全相同,
- ② 元素的排列顺序也相同。

巩固练习:

例 1 下列问题是排列问题吗?

- (1) 从 1, 2, 3, 4 四个数字中, 任选两个做加法, 其不同结果有多少种?
- (2) 从 1, 2, 3, 4 四个数字中, 任选两个做除法, 其不同结果有多少种?
- (3) 从 1 到 10 十个自然数中任取两个组成点的坐标, 可得多少个不同的点的坐标?
- (4) 平面上有 5 个点, 任意三点不共线, 这五点最多可确定多少条射线? 可确定多少条直线?

2. 排列数的定义:

从 n 个不同元素中取 m ($m \leq n$) 个元素的所有排列的个数叫做从 n 个元素中取出 m 元素的排列数, 用符号 A_n^m 表示.

注意区别排列和排列数的不同: “一个排列”是指: 从 n 个不同元素中取 m 个元素按照一定的顺序排成一行, 不是数; “排列数”是指从 n 个不同元素中取 m ($m \leq n$) 个元素的所有排列的个数, 是一个数. 所以符号 A_n^m 只表示排列数, 而不表示具体的排列.

3. 排列数公式及其推导:

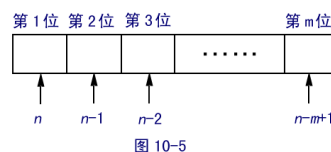
求 A_n^3 可以按依次填 3 个空位来考虑, $\therefore A_n^3 = n(n-1)(n-2)$,

求 A_n^m 以按依次填 m 个空位来考虑 $A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)$,

排列数公

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)$$

($m, n \in N^*, m \leq n$)



说明: (1) 公式特征: 第一个因数是 n , 后面每一个因数比它前面一个少 1, 最后一个因数是 $n-m+1$, 共有 m 个因数;

(2) **全排列:** 当 $n=m$ 时即 n 个不同元素全部取出的一个排列.

全排列数: $A_n^n = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ (叫做 n 的阶乘).

另外, 我们规定 $0! = 1$.

$$A_n^m = \frac{A_n^n}{A_{n-m}^{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

例 2 利用排列数公式计算

(1) $A_5^3 =$

(2) $A_4^4 =$

四. 典例分析

例 3. 某年全国足球甲级 (A 组) 联赛共有 14 个队参加, 每队要与其余各队在主、客场分别比赛一次, 共进行多少场比赛?

例 4. (1) 从 5 本不同的书中选 3 本送给 3 名同学, 每人各 1 本, 有多少种不同的送法?
(2) 从 5 种不同的书中买 3 本送给 3 名同学, 每人各 1 本, 共有多少种不同的送法?

五. 归纳小结:

(1) 排列的特征: 一个是“取出元素”; 二是“按照一定顺序排列”, “一定顺序”就是与位置有关, 这也是判断一个问题是不是排列问题的重要标志。

(2) 排列问题, 是取出元素后, 还要按一定的顺序排成一行, 取出同样的元素, 只要排列顺序不同, 就视为完成这件事的两种不同的方法 (两个不同的排列)。

(3) 排列与排列数是不同的概念, 其中排列数的公式为 $A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$,

A_n^m 以按依次填 m 个空位来考虑: