拓展提升

1．已知 $3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c}=0$，且$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$等于（　　）

A．$-\dfrac{4}{5}$　　　　B．$-\dfrac{3}{5}$　　　　C．0　　　　D．$\dfrac{3}{5}$

【答案】B

【解析】由已知得$4\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{c}$，将等式两边平方得$(4\boldsymbol{b})^2=(-3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{c})^2$，化简得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-\dfrac{3}{5}$．同理由$5\boldsymbol{c}=-3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$两边平方得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\therefore \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-\dfrac{3}{5}$．

故选 B．

2．定义平面向量之间的一种运算“⊙”如下：对任意的 $\boldsymbol{a}=(m,n)$，$\boldsymbol{b}=(p,q)$，令 $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=mq-np$．下面说法错误的是（　　）

A．若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=0$　　　　B．$\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\odot\boldsymbol{a}$

C．对任意的 $\lambda\in\mathbf{R}$，有$(\lambda\boldsymbol{a})\odot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b})$　　　　D．$(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$

【答案】B

【解析】若 $\boldsymbol{a}=(m,n)$与 $\boldsymbol{b}=(p,q)$共线，则 $mq-np=0$，依运算“⊙”知 $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=0$，故 A 正确．

由于 $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=mq-np$，又 $\boldsymbol{b}\odot\boldsymbol{a}=np-mq$，因此 $\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\odot\boldsymbol{a}$，故 B 不正确．

对于 C，由于 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda m,\lambda n)$，因此$(\lambda\boldsymbol{a})\odot\boldsymbol{b}=\lambda mq-\lambda np$，又 $\lambda(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b})=\lambda(mq-np)=\lambda mq-\lambda np$，故 C 正确．

对于 D，$(\boldsymbol{a}\odot\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=m^2q^2-2mnpq+n^2p^2+(mp+nq)^2=m^2(p^2+q^2)+n^2(p^2+q^2)=(m^2+n^2)(p^2+q^2)=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$，故 D 正确．

3．已知$\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},-1)$，$\boldsymbol{b}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，且存在实数 k 和 t，使得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+(t^2-3)\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{y}=-k\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$，试求$\dfrac{k+t^2}{t}$的最小值．

【答案】$-\dfrac{7}{4}$．

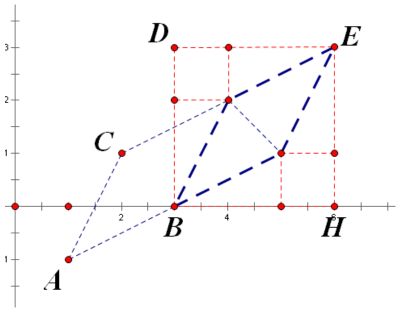
【解析】由题意有$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$．

$\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}-1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$，$\therefore \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$．

$\because \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$，$\therefore [\boldsymbol{a}+(t^2-3)\boldsymbol{b}]\cdot(-k\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})=0$．化简得$k=\dfrac{t^3-3t}{4}$．

$\therefore \dfrac{k+t^2}{t}=\dfrac{1}{4}(t^2+4t-3)=\dfrac{1}{4}(t+2)^2-\dfrac{7}{4}$．即$t=-2$时，$\dfrac{k+t^2}{t}$有最小值为$-\dfrac{7}{4}$．

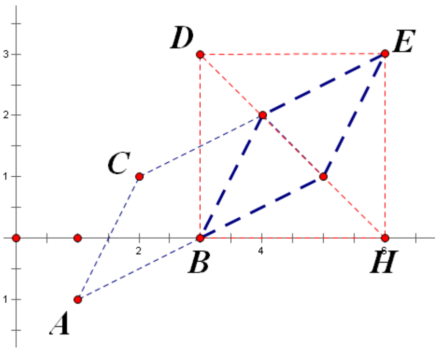
4．已知点 $A(1,-1)$，$B(3,\ 0)$，$C(2,\ 1)$．若平面区域 D 由所有满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$（$1\leqslant\lambda\leqslant2$，$0\leqslant\mu\leqslant1$）的点 P 组成，则区域 D 的面积为____3______．



解法 1： 如图，区域的面积可以看成正方形 $BHED$ 与四个直角三角形及两个小正方形面积的差，

所以 $S_D=3^2-4\times\frac{1}{2}\times1\times2-2\times1^2$

$=9-4-2=3$．



解法 2： 如图，区域的面积等于菱形对角线长乘积的一半，

所以 $S_D=\frac{1}{2}(3\sqrt{2})\times(3\sqrt{2}-2\sqrt{2})$

$=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\sqrt{2}=3$．

解法 3： 假设 AC与x轴交于点M

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta MBC}+S_{\Delta MBA}=\frac{1}{2}\times|MB|\times1+\frac{1}{2}\times|MB|\times1=\frac{3}{2}$$

所以 $S_D=2S_{\Delta ABC}=3$

5．已知 M,N,P,O 在 ΔABC 所在平面内，且 $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MC}|,\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$，

，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA},a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则点 M,N,P,O 依次是 ΔABC 的

________________________________（从重心， 外心， 内心， 垂心中选择）

解析：$|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MC}|$，$M$ 是 ΔABC 的外接圆的圆心，即外心；

$\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$，$N$ 是 ΔABC 的重心；

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC},\overrightarrow{PB}\cdot\left(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}\right)=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\therefore\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{CA}$，同理可证 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{BC},\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$P$ 是 ΔABC 的垂心；

$a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$, $a\overrightarrow{OA}+b\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right)+c\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$, $\left(a+b+c\right)\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$$\overrightarrow{OA}=-\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}=-\frac{bc\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right)}{a+b+c}=-\frac{bc}{a+b+c}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)$$

$$\overrightarrow{AO}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right),\lambda=\frac{bc}{a+b+c}$$

O 在 $\angle BAC$ 的角平分上，同理可证 O 也在 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的角平分上，O 是 ΔABC 的内心

6．O 是 ΔABC 所在平面上一点，动点 P 满足

$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos C}\right),\lambda\in\left(0,+\infty\right)$，则动点 P 的轨迹一定通过 ΔABC 的（　　）

A．外心　B．内心　C．重心　D．垂心

答案：A

设 D 为线段 BC 的中点，则 $\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}=\overrightarrow{OD}$，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos C}\right)$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos C}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{DP}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos C}\right)$$

$$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{BC}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos C}\right)=\lambda\left(\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(180^{\circ}-B\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos B}+\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos C}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos C}\right)$$

$=\lambda\left(-\left|\overrightarrow{BC}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|\right)=0$，

$\therefore\overrightarrow{DP}\perp\overrightarrow{BC}$，点 P 在线段 BC 的垂直平分线上，动点 P 的轨迹一定通过 ΔABC 的外心.