高一数学第47课时平面向量复习（一）

学习目标

1：掌握平面向量的概念、运算、平面向量基本定理、平面向量的数量积及其应用；

2：用向量语言、方法表述解决问题，提升直观想象和数学运算素养，提高分析问题解决问题的能力；

3：体会转化与数形结合等数学思想，增进对数学本质的理解；

学法指导:

向量既是几何研究对象，也是代数研究对象，是沟通几何与代数的桥梁，要在熟练掌握相关知识的同时注意转化与数形结合思想的应用；

一：复习回顾

1、向量运算：

（1）加法运算　平行四边形法则，三角形法则，多边形法则，首尾相连首尾连；

（2）减法运算　共起点，连终点，指向被减；

（3）数乘运算律

$\lambda(\mu\vec{a})=$_____；　　$(\lambda\mu)\vec{a}$

$(\lambda+\mu)\vec{a}=$_____；　　$\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=$_____；　　$\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

（4）数量积与运算律　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$_____；　　$\vec{b}\cdot\vec{a}$

$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=$_____$=$_____；　　$\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}),\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=$_____；　　$\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

2、坐标运算：

设$\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，$\lambda\in\mathrm{R}$，则

（1）$\vec{a}+\vec{b}=$_____；　　(x_1+x_2,y_1+y_2)

（2）$\vec{a}-\vec{b}=$_____；　　(x_1-x_2,y_1-y_2)

（3）$\lambda\vec{a}=$_____；　　$(\lambda x_1,\lambda y_1)$

（4）$\vec{a}\cdot\vec{b}=$_____.　　$x_1x_2+y_1y_2$

3、平面向量基本定理：

如果$\vec{e}_1,\vec{e}_2$是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量$\vec{a}$，有且只有一对实数λ_1,λ_2，使$\vec{a}=$_____；　　$\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2$。

4、两个向量平行的充要条件：

（1）$\vec{a}//\vec{b}$的充要条件是：_____；（向量表示）　$\vec{b}=\lambda\vec{a},\vec{a}\neq\vec{0}$

（2）若$\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，

则$\vec{a}//\vec{b}$的充要条件是：_____；（坐标表示）　$x_1y_2-x_2y_1=0$

5、两个非零向量垂直的充要条件：

（1）$\vec{a}\perp\vec{b}$的充要条件是：_____；（向量表示）　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

（2）若$\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，

则$\vec{a}\perp\vec{b}$的充要条件是：_____；（坐标表示）　$x_1x_2+y_1y_2=0$

6、向量夹角公式

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

平面向量主要知识可概括为：一个定理、两个条件、三种语言、四种运算

（1）平面向量基本定理；

（2）两个向量垂直、平行的条件；

（3）图形语言、符号语言、坐标语言（代数语言）；

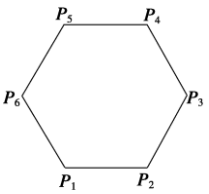
（4）加法、减法，实数与向量的积，向量的数量积；

二：例题精讲

例 1：如图，已知正六边形$P_1P_2P_3P_4P_5P_6$，下列向量的数量积中最大的是（　）

A．$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_3}$　　B．$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_4}$

C．$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_5}$　　D．$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_6}$



解析：根据正六边形的几何性质.

$\langle\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3}\rangle=\frac{\pi}{6}$，$\langle\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_4}\rangle=\frac{\pi}{3}$，$\langle\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_5}\rangle=\frac{\pi}{2}$，$\langle\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_6}\rangle=\frac{2\pi}{3}$．$\therefore\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_6}<0$，$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_5}=0$，$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_3}>\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_4}$，比较可知 A 正确.

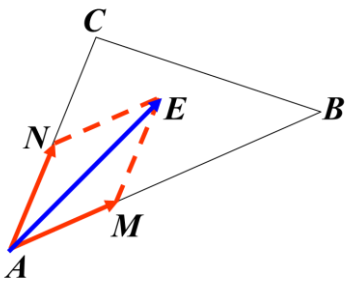
例 2：设 $x,y\in\mathrm{R}$，向量 $a=(x,1),b=(1,y),c=(2,-4)$ 且 $\vec{a}\perp\vec{c},\vec{b}//\vec{c}$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|$

（A）$\sqrt{5}$　　（B）$\sqrt{10}$　　（C）$2\sqrt{5}$　　（D）10

解析：因为 $\vec{a}\perp\vec{c},\vec{b}//\vec{c}$，所以有 $2x-4=0$ 且 $2y+4=0$，解得 $x=2$，$y=-2$，即 $\vec{a}=(2,1),\vec{b}=(1,-2)$，所以 $\vec{a}+\vec{b}=(3,-1)$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10}$，选 B.

例 3．已知点 O 是平面上一定点，A、B、C 是平面上不共线的三个点，动点 P 满足：$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，$\lambda\in[0,+\infty)$，则点 P 的轨迹一定通过△ABC 的（　　）.

A．外心　B．内心　C．重心　D．垂心



解析：

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$是与$\overrightarrow{AB}$同方向的单位向量，令$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\overrightarrow{AM},\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\overrightarrow{AN}$，则 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)$，即 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AE}$，四边形 $AMEN$ 是菱形，AE 平分 $\angle MAN$，即 $\angle BAC$，点 P 的轨迹一定通过 ΔABC 的内心．答案：B

（1）深化理解“向量”概念.

（2）养成“数形结合”的思维习惯.

数形结合是处理向量问题的常用思想方法，数形结合的关键在于把握基本量的代数形式与几何特征之间的联系．如本题中由 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$ 看到单位向量．

例 4．已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\dfrac{1}{2}$，求：

（1）$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角；（2）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值．

解析：（1）$\because(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=1-|\boldsymbol{b}|^2=\dfrac{1}{2}$，$\therefore|\boldsymbol{b}|^2=\dfrac{1}{2}$，$\therefore|\boldsymbol{b}|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．$\because\theta\in\left[0^\circ,180^\circ\right],\therefore\theta=45^\circ$．

（2）$\because|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=1-2\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$．

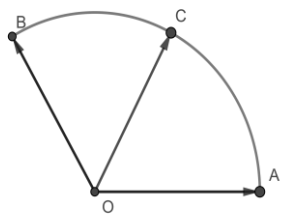
$\therefore|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，又 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=1+2\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$．$\therefore|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，

设 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为 α，则 $\cos\alpha=\dfrac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

（1）见模平方，勿忘开方；

例5.给定两个长度为1的平面向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$，它们的夹角为 120^o.如图所示，点C在以O为圆心的圆弧 AB 上变动.若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,其中 $x,y\in R$,则 $x+y$ 的最大值是_____.



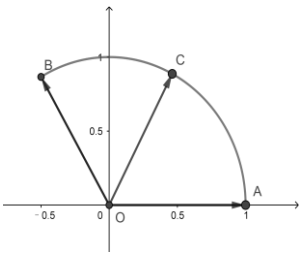
解法一：

$1=x^2+y^2+2xy\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x^2+y^2+2xy\times1\times1\times\cos120^\circ=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy$

$\therefore(x+y)^2-1=3xy\le3\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2,(x+y)^2\le4,x+y\le2$

当$x=y$时， $x+y$取得最大值2

解法二：以O为坐标原点，以OA为x轴正方向建立如图所示的平面直角坐标系



$$设\overrightarrow{OA}=(1,0),\overrightarrow{OB}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{OC}=(\cos\alpha,\sin\alpha),\left(0^{\circ}\le\alpha\le120^{\circ}\right)$$

$$(\cos\alpha,\sin\alpha)=x(1,0)+y\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(x-\frac{1}{2}y,\frac{\sqrt{3}y}{2}\right)$$

$$\begin{cases}\cos\alpha=x-\frac{1}{2}y\\ \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}y}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\alpha+\cos\alpha\\ y=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha\end{cases}$$

$$x+y=\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=2\left[(\sin\alpha)\times\frac{\sqrt{3}}{2}+(\cos\alpha)\times\frac{1}{2}\right]=2\sin\left(\alpha+30^{\circ}\right)$$

当α=60°时$x+y$的最大值是2

（1）已知条件如何翻译转化；
（2）目标意识；
（3）基本不等式；

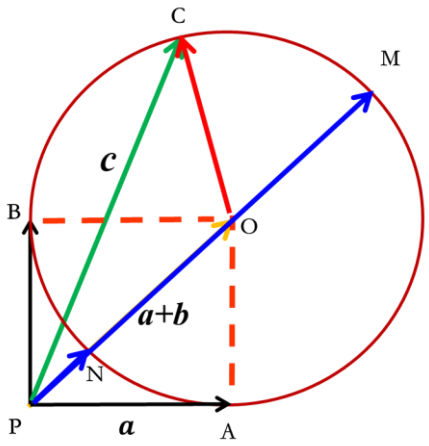
有了平面向量基本定理，平面上所有的向量都可以用一组基底表示，从而使得向量“代数化”，更为方便．平面直角坐标系是平面向量基本定理的特殊情况（正交基底），在这种正交基底的情况下，向量的运算就转化为坐标运算，问题因此得到简化；

（选做题）例6：已知$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是单位向量，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$．若向量$\boldsymbol{c}$满足$|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$，

则$|\boldsymbol{c}|$的取值范围是

（A）$[\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1]$　　（B）$[\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+2]$

（C）$[1,\ \sqrt{2}+1]$　　（D）$[1,\ \sqrt{2}+2]$



解析：依条件及$|\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|=|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$画出右图.

C 在以 O 为圆心以 1 为半径的圆上

显然当点C运动到点N时，$|\boldsymbol{c}|$取最大值$\sqrt{2}+1$；

当点C运动到点M时，$|\boldsymbol{c}|$取最小值$\sqrt{2}-1$.

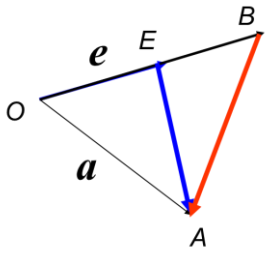
所以$|\boldsymbol{c}|$的取值范围是$[\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1]$.

故选 A.

（选做题）**例** 7. 已知向量$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{e}$，$|\boldsymbol{e}|=1$，对任意实数$t$，恒有$|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geq|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$，则（　）

A．$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{e}$　　B．$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$

C．$\boldsymbol{e}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$　D．$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$



解析：EA是OB上的点与点A连线中的最短线段，所以EA垂直OE，由数到形，数形结合.

答案:C．$\boldsymbol{e}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$

三:课堂小结

1：知识、方法总结；

2：基本数学思想

（1）转化与化归；

（2）数形结合思想：向量具有几何和代数双重属性，解题时要由数想形，由形到数，数形结合，相得益彰.