用向量法研究三角形的性质拓展提升答案

1. 求证三角形三条边的垂直平分线交于一点.

已知：在ΔABC中，D,E,G分别为AB,AC,BC的中点，AB,AC的中垂线交于点F.

求证：$GF\perp BC$

解析：证明：以A为坐标原点，AB为x轴的正方向建立平面直角坐标系

设B（$2a$,0） $C(2x_1,2y_1)$ $F(x,y)$，所以$E(x_1,y_1)$ $D(a,0)$，

$\vec{AC}=(2x_1,2y_1)$ $\vec{AB}=(2a,0)$ $\vec{DF}=(x-a,2y)$ $\vec{EF}=(x-x_1,y-y_1)$

因为$EF\perp AC$，所以$\vec{EF}\cdot\vec{AC}=0$，即$2x_1(x-x_1)+2y_1(y-y_1)=0$------①

同理有$\vec{DF}\cdot\vec{AB}=0$即$2a(x-a)=0$----② 由①②得$x=a$，$y=y_1+\dfrac{x_1(x_1-a)}{y_1}$

由中点坐标公式解得$G(x_1+a,y_1)$，所以$\vec{GF}=(-x_1,\dfrac{x_1(x_1-a)}{y_1})$

因为$\vec{BC}=(2x_1\text{-}2a,2y_1)$，$\vec{GF}\cdot\vec{BC}=2x_1(a-x_1)+2x_1(x_1-a)=0$

所以$\vec{GF}\perp\vec{BC}$，即$GF\perp BC$

2. 如图所示，经过$\angle AOB$的角平分线上的一点P任作一直线分别交OA,OB于点C,D.

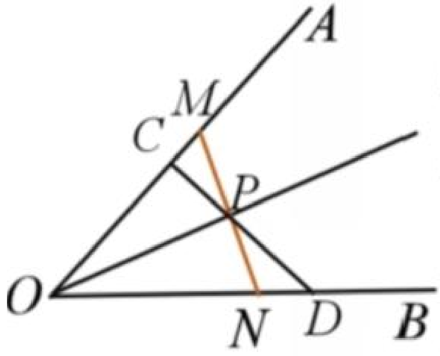
求证：$\dfrac{1}{OC}+\dfrac{1}{OD}$为定值.

解析：证明：过点P作OP的垂线分别交OA,OB于点M和N，则ΔMON是等腰三角形，

则有$\vec{OP}=\dfrac{1}{2}(\vec{OM}+\vec{ON})=\dfrac{1}{2}(\dfrac{|\vec{OM}|}{|\vec{OC}|}\vec{OC}+\dfrac{|\vec{ON}|}{|\vec{OD}|}\vec{OD})$，

又因为C,P,D三点共线，所以$\dfrac{1}{2}(\dfrac{|\vec{OM}|}{|\vec{OC}|}+\dfrac{|\vec{ON}|}{|\vec{OD}|})=1$，而$|\vec{OM}|=|\vec{ON}|$，

因此$\dfrac{1}{|\vec{OC}|}+\dfrac{1}{|\vec{OD}|}=\dfrac{2}{|\vec{\mathrm{OP}}|}$为定值.



3. 证明欧拉线定理.

已知：设点O,G,H分别为ΔABC的外心、重心和垂心.

求证：O,G,H三点共线，且OG：$GH=1:2$.

证明：点G为ΔABC的重心，则$\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$，从而$\vec{OG}=\dfrac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})$

下证$\vec{OH}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$.设

CF为ΔABC外接圆的一条直径，则$\angle FBC=\angle FAC=90^0$，

所以$FB//AH,FA//BH$,因此四边形$AFBH$为平行四边形，

$\vec{OH}=\vec{OA}+\vec{AH}=\vec{OA}+\vec{FB}=\vec{OA}+\vec{FO}+\vec{OB}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$.

$\therefore\vec{OG}=\dfrac{1}{3}\vec{OH}$，$\therefore O,G,H$三点共线，且$OG$：$GH=1:2$