

高一年级数学第 48 课时学习指南

数学探究--用向量法研究三角形的性质

【学习目标】

1. 会用向量表示三角形中的点、线段、夹角等元素；
2. 通过向量的线性运算、数量积运算、坐标运算，研究点、线段、夹角之间的关系；
3. 能将三角形性质问题转化为向量问题，并将向量运算结果翻译为几何关系，体会向量运算与几何图形性质的内在联系，提高应用向量方法解决平面几何问题的意识；

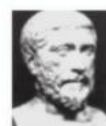
【学法指导】

首先阅读八年级上册第 10 章三角形 P11-P14 和八年级下册第 17 章勾股定理 P22-P30 的材料，回顾初中直角三角形性质及其证明；其次回顾三角形的性质及其证明；最后思考向量法研究平面几何问题的基本步骤。



17.1 勾股定理

相传 2 500 多年前，毕达哥拉斯有一次在朋友家作客时，发现朋友家用砖铺成的地面图案反映了直角三角形三边的某种数量关系。我们也来观察一下地面的图案（图 17.1-1），看看能从中发现什么数量关系。



毕达哥拉斯 (Pythagoras, 约前 580—约前 500)，古希腊著名的哲学家、数学家、天文学家。



图 17.1-1



思考

图 17.1-2 中三个正方形的面积有什么关系？等腰直角三角形的三边之间有什么关系？



图 17.1-2

可以发现，以等腰直角三角形两直角边为边长的小正方形的面积的和，等于以斜边为边长的大正方形的面积。即等腰直角三角形的三边之间有一种特殊的关系：斜边的平方等于两直角边的平方和。

看似平淡无奇的现象有时却蕴含着深刻的道理。

探究

等腰直角三角形有上述性质，其他的直角三角形也有这个性质吗？图 17.1-3 中，每个小方格的面积均为 1，请分别算出图中正方形 A、B、C、A'、B'、C' 的面积，看看能得出什么结论。（提示：以斜边为边长的正方形的面积，等于某个正方形的面积减去 4 个直角三角形的面积。）

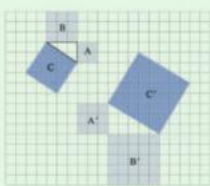


图 17.1-3

由上面的几个例子，我们猜想（图 17.1-4）：

命题 1 如果直角三角形的两条直角边长分别为 a 、 b ，斜边长为 c ，那么 $a^2 + b^2 = c^2$ 。

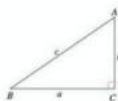


图 17.1-4

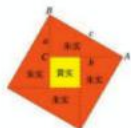


图 17.1-5

证明命题 1 的方法有很多，下面介绍我国古人赵爽的证法。

如图 17.1-5，这个图案是 3 世纪我国汉代的赵爽在注解《周髀算经》时给出的，人们称它为“赵爽弦图”。赵爽根据此图指出：四个全等的直角三角形（红色）可以如图围成一个大正方形，中空的部分是一个小正方形（黄色）。

赵爽利用弦图证明命题 1 的基本思路如下：如图 17.1-6(1)，把边长为 a 、 b 的两个正方形

赵爽指出：弦图，又可以勾股相乘为朱实二，倍之为朱实四，以勾股之差自相乘为中黄实，加差实，亦成弦实。

连在一起，它的面积是 $a^2 + b^2$ ；另一方面，这个图形可分割成四个全等的直角三角形（红色）和一个正方形（黄色）。把图 17.1-6(1) 中左、右两个三角形移到图 17.1-6(2) 中所示的位置，就会形成一个以 c 为边长的正方形（图 17.1-6(3)）。因为图 17.1-6(1) 与图 17.1-6(3) 都由四个全等的直角三角形（红色）和一个正方形（黄色）组成，所以它们的面积相等。因此， $a^2 + b^2 = c^2$ 。

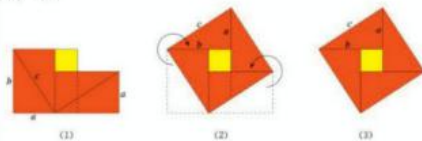


图 17.1-6

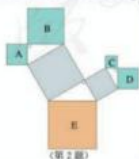
这样我们就证实了命题 1 的正确性，命题 1 与直角三角形的边有关，我国把它称为**勾股定理**（Pythagoras theorem）。

“赵爽弦图”通过对图形的切割、拼接，巧妙地利用面积关系证明了勾股定理，它表现了我国古人对数学的钻研精神和聪明才智，是我国古代数学的骄傲。因此，这个图案（图 17.1-5）被选为 2002 年在北京召开的国际数学家大会的会徽。

赵爽所用的这种方法是我国古代数学家常用的“出入相补法”，在西方，人们称勾股定理为毕达哥拉斯定理。

练习

1. 设直角三角形的两条直角边长分别为 a 和 b ，斜边长为 c 。
 - (1) 已知 $a=6$ ， $c=10$ ，求 b ；
 - (2) 已知 $a=5$ ， $b=12$ ，求 c ；
 - (3) 已知 $c=25$ ， $b=15$ ，求 a 。
2. 如图，图中所有的三角形都是直角三角形，四边形都是正方形，已知正方形 A、B、C、D 的边长分别是 12、16、9、12，求最大正方形 E 的面积。



（第 2 题）

阅读与思考

勾股定理的证明

2 000 多年来，人们对勾股定理的证明颇感兴趣，不但因为这个定理重要、基本，还因为这个定理贴近人们的生活实际。以至于古往今来，下至平民百姓，上至帝王总统都愿意探讨、研究它的证明，新的证法不断出现。下面介绍几种用来证明勾股定理的图形，你能根据这些图形及提示证明勾股定理吗？

1. 传说中毕达哥拉斯的证法（图 1）

提示：(1) 中拼成的正方形与 (2) 中拼成的正方形面积相等。

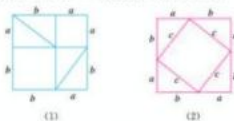


图 1

2. 按图的另一证法（图 2）

提示：以斜边为边长的正方形的面积 = 4 个三角形的面积 + 外正方形的面积。

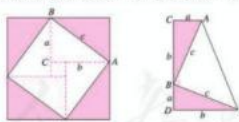


图 2

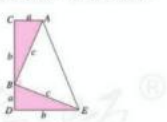


图 3

3. 美国第 20 任总统詹姆斯·加菲尔德的证法（图 3）

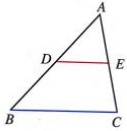
提示：3 个三角形的面积之和 = 梯形的面积。

【知识回顾】

【思考 1】 回顾用向量方法推导正弦定理、余弦定理的过程，你能总结用向量方法解决平面几何问题的步骤是什么？

- (1) 建立平面几何与向量的联系，用向量表示问题中涉及的几何要素，将平面几何问题转化为向量问题；
- (2) 通过向量运算，研究几何要素之间的联系，如距离、夹角等问题；
- (3) 把运算结果翻译成几何关系。

【思考 2】如何将三角形的几何特征转化为向量问题呢？请同学们完成下表.

三角形的几何特征	代数化
	
A, D, B 三点共线	$\vec{AD} = \lambda \vec{AB}$
$BC \parallel DE$	$\vec{BC} = \lambda \vec{DE}$ 或 $\langle \vec{BC}, \vec{DE} \rangle = 0$ 或 π
$AB \perp BC$	$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$
AB 与 BC 相交	$\langle \vec{AB}, \vec{BC} \rangle \in (0, \pi)$
$AC = AB$	$ \vec{AC} = \vec{AB} $
$AB = \lambda CD$ (其中 $\lambda > 0$)	$ \vec{AB} = \lambda \vec{CD} $ (其中 $\lambda > 0$)
$\angle B = \angle C$	$\cos B = \cos C$ 即 $\langle \vec{BA}, \vec{BC} \rangle = \langle \vec{CB}, \vec{CA} \rangle$

【思考 3】关于三角形，你能想到哪些性质呢？

【问题清单】

【问题 1】初中我们是如何证明勾股定理的呢？

追问 1. 如何用向量方法证明勾股定理呢？

$$\because \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB} \therefore (\vec{AC} + \vec{CB})^2 = (\vec{AB})^2 \text{ 即 } |\vec{AC}|^2 + 2\vec{AC} \cdot \vec{CB} + |\vec{CB}|^2 = |\vec{AB}|^2,$$

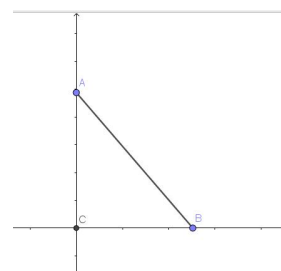
$$\because \vec{AC} \perp \vec{CB}, \therefore \vec{AC} \cdot \vec{CB} = 0, \therefore |\vec{AC}|^2 + |\vec{CB}|^2 = |\vec{AB}|^2$$

追问 2. 是否可以从向量的代数角度即坐标运算来证明勾股定理呢？

以点 C 为原点， CB 为 x 轴， CA 为 y 轴建立平面直角坐标系， $A(0, b)$ ， $B(a, 0)$ ， $C(0, 0)$ ，

$$\text{所以 } \vec{AB} = (a, -b), |\vec{AB}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{所以 } |\vec{AC}|^2 + |\vec{BC}|^2 = |\vec{AB}|^2 \text{ 得证。}$$



追问 3. 对比证明方法，请阐述各自的特点？

平面几何中证明勾股定理时，需要添加辅助线、构造正方形等，不仅复杂而且不容易想到。但是向量法 1 仅用到了三角形回路（向量加法）和数量积运算，向量法 2 仅用到了向量的坐标运算，向量的两个角度的证明过程都相对程序化，易想、方便、便捷、简单。与平面几何有大量基本事实、定理比较，向量法在解决某些几何问题时简捷得多。

对比向量的两种方法，向量的代数法更简单。

【问题 2】三角形的三条中线为何交于一点？

如图，在 $\triangle ABC$ 的中线 BE ， CF 交于一点 O ，连接 AO 与 BC 交于点 D ，

求证： AD 是 $\triangle ABC$ 的中线。

证明：过点 B 作 $BG \parallel FC$ 交 AD 延长线于点 G ，连接 CG 。

$\because BG \parallel FC$ ， F 是 AB 的中点

$\therefore FO$ 是 $\triangle ABG$ 的中位线

$\therefore O$ 是 AG 的中点

$\because E$ 是 AC 的中点

$\therefore OE$ 是 $\triangle ACG$ 的中位线

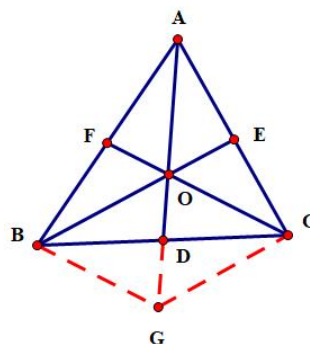
$\therefore OE \parallel CG$

$\because BG \parallel FC$

$\therefore$ 四边形 $OBGC$ 为平行四边形

$\therefore BD = CD$

$\therefore AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线



追问 1：你能用向量方法证明三角形的三条中线交于一点吗？

$$\vec{AO} = \vec{FO} - \vec{FA} = \vec{FO} + \vec{FB} = \vec{FO} + \vec{FO} + \vec{OB} = 2\vec{FO} + \vec{OB}$$

$$\vec{OD} = \vec{BD} - \vec{BO} = \frac{1}{2}\vec{BC} + \vec{OB} = \frac{1}{2}(\vec{OC} - \vec{OB}) + \vec{OB} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OB})$$

因为 F 、 O 、 C 三点共线，所以设 $\vec{FO} = t_2 \vec{OC}$ ，同理设 $\vec{EO} = t_1 \vec{OB}$

在三角形 $\triangle ABC$ 中， $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = 2\vec{EC} - 2\vec{FB}$

而 $\vec{EC} = \vec{EO} + \vec{OC} = t_1 \vec{OB} + \vec{OC}$ ； $\vec{FB} = \vec{FO} + \vec{OB} = t_2 \vec{OC} + \vec{OB}$ ； $\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB}$

所以 $\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = 2(t_1 - 1)\vec{OB} - 2(t_2 - 1)\vec{OC}$

即 $\begin{cases} 2(t_1 - 1) = -1 \\ 2(t_2 - 1) = -1 \end{cases}$ ，解得 $t_1 = \frac{1}{2}$ ， $t_2 = \frac{1}{2}$ ，所以 $\vec{FO} = \frac{1}{2}\vec{OC}$ ，所以 $\vec{AO} = 2\vec{OD}$

所以 A 、 O 、 D 三点共线

追问 2: 对比向量法, 阐述两种方法各自的特点.

向量法过程相对程序化, 易想、方便、便捷、简单. 与平面几何有大量基本事实、定理、技巧方法比较, 向量法在解决某些几何问题时简捷得多.

追问 3: 你有没有新的发现?

$$\vec{FO} = \frac{1}{2} \vec{OC}, \vec{EO} = \frac{1}{2} \vec{OB}, \vec{DO} = \frac{1}{2} \vec{OA}$$

追问 4: 你能用自然语言叙述这个关系式的意义吗?

重心将中线长度分成 2:1 的两条线段. 即三角形的重心是中线的三等分点

请同学们再次总结用向量方法处理几何问题的基本步骤.

【练习】

用向量方法证明等腰三角形的两底角相等.

证明:

方法 1: $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$, $\vec{AC} = \vec{BC} - \vec{BA}$

$$|\vec{AB}|^2 = (\vec{CB} - \vec{CA})^2 \text{ 即 } |\vec{AB}|^2 = |\vec{CB}|^2 - \vec{CB} \cdot \vec{CA} + |\vec{CA}|^2,$$

$$|\vec{AC}|^2 = (\vec{BC} - \vec{BA})^2 \text{ 即 } |\vec{AC}|^2 = |\vec{BC}|^2 - \vec{BC} \cdot \vec{BA} + |\vec{BA}|^2,$$

因为 $|\vec{AB}| = |\vec{AC}|$ 所以 $\vec{CB} \cdot \vec{CA} = \vec{BC} \cdot \vec{BA}$

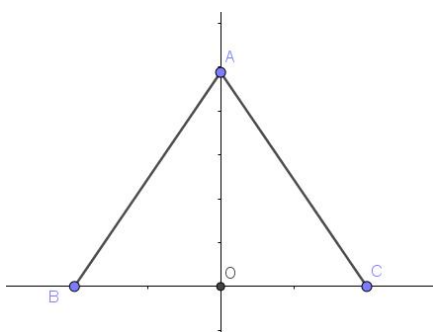
$$\text{即 } |\vec{CB}| \cdot |\vec{CA}| \cdot \cos \langle \vec{CB}, \vec{CA} \rangle = |\vec{BC}| \cdot |\vec{BA}| \cdot \cos \langle \vec{BC}, \vec{BA} \rangle$$

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{BA}, \vec{BC} \rangle = \cos \langle \vec{CB}, \vec{CA} \rangle \text{ 即 } \cos B = \cos C$$

因为 $\angle B$, $\angle C$ 为三角形内角, 所以 $\angle B = \angle C$ 得证.

方法 2: 以点 BC 中点 O 为原点, CB 为 x 轴, OA 为 y 轴建立平面直角坐标系, 设 $A(0, b)$,

$$B(-a, 0), C(a, 0), \vec{BA} = (a, b), \vec{CA} = (-a, b), \vec{BO} = (a, 0), \vec{CO} = (-a, 0)$$



$$\text{利用数量积坐标运算可得 } \vec{BA} \cdot \vec{BO} = a^2 = \vec{CO} \cdot \vec{CA}$$

研究报告的参考形式

用向量法研究三角形的性质

-----年级-----班

完成时间-----

1、本课题组的成员姓名
2、发现的数学结论及发现过程概述
3、证明思路及其形成过程概述
4、结论的证明或否定
5、用向量法探究几何图形性质的一般步骤
6、收获与体会