

高一年级数学第 48 课时学习指南

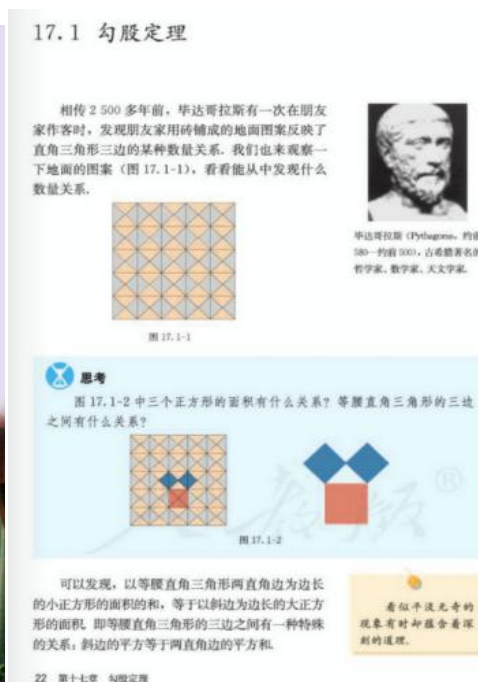
数学探究--用向量法研究三角形的性质

【学习目标】

1. 会用向量表示三角形中的点、线段、夹角等元素；
2. 通过向量的线性运算、数量积运算、坐标运算，研究点、线段、夹角之间的关系；
3. 能将三角形性质问题转化为向量问题，并将向量运算结果翻译为几何关系，体会向量运算与几何图形性质的内在联系，提高应用向量方法解决平面几何问题的意识；

【学法指导】

首先阅读八年级上册第 10 章三角形 P11-P14 和八年级下册第 17 章勾股定理 P22-P30 的材料，回顾初中直角三角形性质及其证明；其次回顾三角形的性质及其证明；最后思考向量法研究平面几何问题的基本步骤。



探究

等腰直角三角形有上述性质，其他的直角三角形也有这个性质吗？图 17.1-3 中，每个小方格的面积均为 1，请分别算出图中正方形 A、B、C、A'、B'、C' 的面积，看看能得出什么结论。（提示：以斜边为边长的正方形的面积，等于某个正方形的面积减去 4 个直角三角形的面积。）

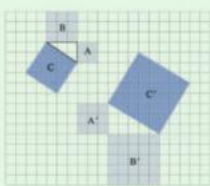


图 17.1-3

由上面的几个例子，我们猜想（图 17.1-4）：

命题 1 如果直角三角形的两条直角边长分别为 a 、 b ，斜边长为 c ，那么 $a^2 + b^2 = c^2$ 。

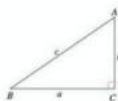


图 17.1-4

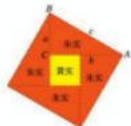


图 17.1-5

证明命题 1 的方法有很多，下面介绍我国古人赵爽的证法。

如图 17.1-5，这个图案是 3 世纪我国汉代的赵爽在注解《周髀算经》时给出的，人们称它为“赵爽弦图”。赵爽根据此图指出：四个全等的直角三角形（红色）可以如图围成一个正方形，中空的部分是一个小正方形（黄色）。

赵爽利用弦图证明命题 1 的基本思路如下：如图 17.1-6(1)，把边长为 a 、 b 的两个正方形

赵爽指出：弦图，又可以勾股相乘为朱实二，倍之为朱实四，以勾股之差自相乘为中黄实，加差实，亦成弦实。

连在一起，它的面积是 $a^2 + b^2$ ；另一方面，这个图形可分割成四个全等的直角三角形（红色）和一个正方形（黄色）。把图 17.1-6(1) 中左、右两个三角形移到图 17.1-6(2) 中所示的位置，就会形成一个以 c 为边长的正方形（图 17.1-6(3)）。因为图 17.1-6(1) 与图 17.1-6(3) 都由四个全等的直角三角形（红色）和一个正方形（黄色）组成，所以它们的面积相等。因此， $a^2 + b^2 = c^2$ 。

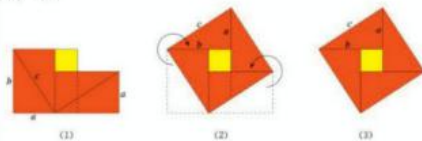


图 17.1-6

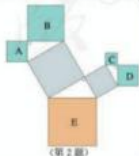
这样我们就证实了命题 1 的正确性，命题 1 与直角三角形的边有关，我国把它称为**勾股定理** (Pythagoras theorem)。

“赵爽弦图”通过对图形的切割、拼接，巧妙地利用面积关系证明了勾股定理，它表现了我国古人对数学的钻研精神和聪明才智，是我国古代数学的骄傲。因此，这个图案（图 17.1-5）被选为 2002 年在北京召开的国际数学家大会的会徽。

赵爽所用的这种方法是我国古代数学家常用的“出入相补法”，在西方，人们称勾股定理为毕达哥拉斯定理。

练习

1. 设直角三角形的两条直角边长分别为 a 和 b ，斜边长为 c 。
 - (1) 已知 $a=6$ ， $c=10$ ，求 b ；
 - (2) 已知 $a=5$ ， $b=12$ ，求 c ；
 - (3) 已知 $c=25$ ， $b=15$ ，求 a 。
2. 如图，图中所有的三角形都是直角三角形，四边形都是正方形，已知正方形 A、B、C、D 的边长分别是 12、16、9、12，求最大正方形 E 的面积。



（第 2 题）

阅读与思考

勾股定理的证明

2 000 多年来，人们对勾股定理的证明兴趣不减，不仅因为这个定理重要、基本，还因为这个定理贴近人们的生活实际。以至于古往今来，下至平民百姓，上至帝王总统都愿意探讨、研究它的证明，新的证法不断出现。下面介绍几种用来证明勾股定理的图形，你能根据这些图形及提示证明勾股定理吗？

1. 传说中毕达哥拉斯的证法（图 1）

提示：(1) 中拼成的正方形与 (2) 中拼成的正方形面积相等。

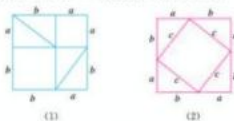


图 1

2. 按图的另一证法（图 2）

提示：以斜边为边长的正方形的面积 = 4 个三角形的面积 + 外正方形的面积。

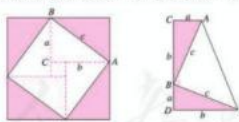


图 2

图 3

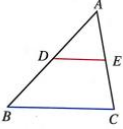
3. 美国第 20 任总统詹姆斯·加菲尔德的证法（图 3）

提示：3 个三角形的面积之和 = 梯形的面积。

【知识回顾】

【思考 1】 回顾用向量方法推导正弦定理、余弦定理的过程，你能总结用向量方法解决平面几何问题的步骤是什么？

【思考 2】如何将三角形的几何特征转化为向量问题呢？请同学们完成下表.

三角形的几何特征	代数化
	
A, D, B 三点共线	
$BC \parallel DE$	
$AB \perp BC$	
AB 与 BC 相交	
$AC = AB$	
$AB = \lambda CD$ (其中 $\lambda > 0$)	
$\angle B = \angle C$	

【思考 3】关于三角形，你能想到哪些性质呢？

【问题清单】

【问题 1】初中我们是如何证明勾股定理的呢？

追问 1. 如何用向量方法证明勾股定理呢？

追问 2. 是否可以从向量的代数角度即坐标运算来证明勾股定理呢？

追问 3. 对比证明方法，请阐述各自的特点？

【问题 2】三角形的三条中线为何交于一点？

追问 1：你能用向量方法证明三角形的三条中线交于一点吗？

追问 2：对比向量法，阐述两种方法各自的特点.

追问 3：你有没有新的发现？

追问 4：你能用自然语言叙述这个关系式的意义吗？

请同学们再次总结用向量方法处理几何问题的基本步骤.

【练习】

用向量方法证明等腰三角形的两底角相等。

研究报告的参考形式

用向量法研究三角形的性质

-----年级-----班

完成时间-----

1、本课题组的成员姓名
2、发现的数学结论及发现过程概述
3、证明思路及其形成过程概述
4、结论的证明或否定
5、用向量法探究几何图形性质的一般步骤
6、收获与体会