6.4.1-6.4.2 平面向量应用拓展提升参考答案

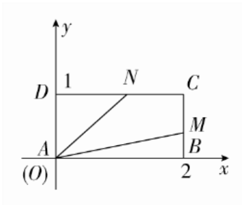
1．在矩形 $ABCD$ 中，边 AB，AD 的长分别为 2,1.若 M，N 分别是边 BC，CD 上的点，且满足$\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}$，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$的取值范围是（　　）

A．[1,2]　　　B．[1,4]　　　C．$[\frac{1}{2},2]$　　　D．$[\frac{1}{2},4]$

解析　解法一：设$\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}=\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DN}=(1-\lambda)\overrightarrow{DC}=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}$，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN})=(\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD})\cdot[\overrightarrow{AD}+(1-\lambda)\overrightarrow{AB}]=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+(1-\lambda)\overrightarrow{AB}^2+\lambda\overrightarrow{AD}^2+\lambda(1-\lambda)\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

∵$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，∴$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=4-3\lambda$.

∵$0\leqslant\lambda\leqslant1$，∴$1\leqslant\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}\leqslant4$，即$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$的取值范围是[1,4]．选 B



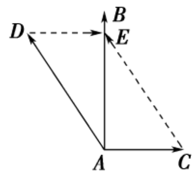
解法二：如图所示，以点 A 为坐标原点，以边 AB 所在直线为 x 轴，边 AD 所在直线为 y 轴，建立平面直角坐标系．因为 $AB=2$，$AD=1$，所以 $A(0,0)$，$B(2，0)$，$D(0,1)$，$C(2，1)$．设$\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}=t\in[0,1]$，则$|\overrightarrow{BM}|=t$，$|\overrightarrow{CN}|=2t$.则 $M(2，t)$，$N(2-2t,1)$，故$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=4-4t+t=4-3t$，

又 $t\in[0,1]$，所以$(\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN})_{max}=4-3\times0=4$，

$(\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN})_{min}=4-3\times1=1$.故$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$的取值范围是[1,4]．选 B

2．一条宽为$\sqrt{3}$km 的河，水流速度为 2 km/h，在河两岸有两个码头 A，B，已知 $AB=\sqrt{3}$km，船在水中最大航速为 4 km/h；问怎样安排航行速度，若该船从 A 码头最快到达彼岸 B 码头应沿______________方向航行，用时为_______ 小时。

解析　如图所示，设$\overrightarrow{AC}$为水流速度，$\overrightarrow{AD}$为航行速度，以 AC 和 AD 为邻边作▱$ACED$，



当 AE 与 AB 重合时能最快到达彼岸.

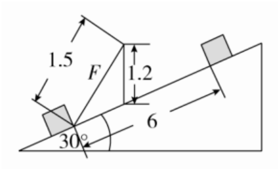
根据题意知 $AC\perp AE$，在 Rt△ADE 和▱$ACED$ 中，

$|\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{AC}|=2$，$|\overrightarrow{AD}|=4$，$\angle AED=90°$，

∴$|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{DE}|^2}=2\sqrt{3}$，$\sqrt{3}\div 2\sqrt{3}=0.5(\text{h})$，$\sin\angle EAD=\dfrac{1}{2}$,∴$\angle EAD=30°$.

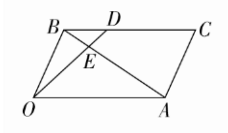
∴船实际航行速度大小为 4 km/h，与水流成 120°角时能最快到达 B 码头，用时 0.5 小时.

3．如图，某人用 1.5 m 长的绳索，施力 25 N，把重物沿坡度为 30°的斜面向上拖 6m，拖拉点距斜面的垂直高度为 1.2 m．则此人对物体所做的功为_______.



解析　因为绳索长 1.5 m，拖拉点距斜面的垂直高度为 1.2 m，斜面坡度为 30°，所以作用力 $\boldsymbol{F}$ 与斜面之间所成的角度 θ 满足 $\sin\theta=\dfrac{1.2\sin 60°}{1.5}=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$，所以 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{\sqrt{13}}{5}$，记沿斜面向上方向的单位向量为 $\boldsymbol{e}$，则位移 $\boldsymbol{s}=6\boldsymbol{e}$，$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta=25\times 6\times\dfrac{\sqrt{13}}{5}=30\sqrt{13}(\text{J})$，所以此人对物体所做的功为 $30\sqrt{13}$ J.

4.如图,在▱$OACB$ 中,$BD=\dfrac{1}{3}BC$,OD 与 BA 相交于点 E.若 $BE=kBA$,则 $k=$______.



解析∵O, E, D 共线，∴向量$\overrightarrow{OE}$与向量$\overrightarrow{OD}$共线. 则存在实数 λ_1，使得$\overrightarrow{OE}=\lambda_1\overrightarrow{OD}$.

而$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$，则$\overrightarrow{OE}=\lambda_1\overrightarrow{OB}+\dfrac{\lambda_1}{3}\overrightarrow{OA}$.

又∵A, E, B 共线，∴$\overrightarrow{BE}$与$\overrightarrow{BA}$共线，则存在实数 λ_2，使$\overrightarrow{BE}=\lambda_2\overrightarrow{BA}=\lambda_2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$.

$\therefore \overrightarrow{BE}=\lambda_2\overrightarrow{OA}-\lambda_2\overrightarrow{OB}$.而$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{OE}$，

$\therefore \overrightarrow{OB}+\lambda_2\overrightarrow{OA}-\lambda_2\overrightarrow{OB}=\lambda_1\overrightarrow{OB}+\frac{\lambda_1}{3}\overrightarrow{OA}$.，即$(1-\lambda_2)\overrightarrow{OB}+\lambda_2\overrightarrow{OA}=\lambda_1\overrightarrow{OB}+\frac{\lambda_1}{3}\overrightarrow{OA}$.

$\because \overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$不共线，$\therefore \begin{cases}1-\lambda_2=\lambda_1,\\ \lambda_2=\frac{\lambda_1}{3},\end{cases}$ $\therefore \lambda_2=\frac{1}{4}$.，$\therefore \overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$，即 $BE=\frac{1}{4}BA$.

5.在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$\angle CDA=\angle DAB=90°$，$CD=DA=\frac{1}{2}AB$，求证：$AC\perp BC$.

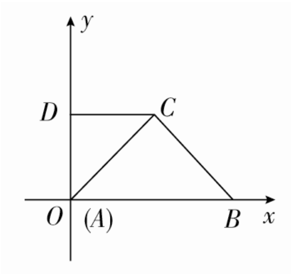
解析　证法一：$\because \angle CDA=\angle DAB=90°$，$AB\parallel CD$，$CD=DA=\frac{1}{2}AB$，

故可设$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{e}_1$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{e}_2$，$|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|$，则$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{e}_2$.

$\therefore \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)-2\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$.

而$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{e}_1^2-\boldsymbol{e}_2^2=|\boldsymbol{e}_1|^2-|\boldsymbol{e}_2|^2=0$，

$\therefore \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，即 $AC\perp BC$.



证法二：如图，建立直角坐标系，设 $CD=1$，则 $A(0,0)$，$B(2,0)$，$C(1,1)$，$D(0,1)$.

$\therefore \overrightarrow{BC}=(-1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,1)$. $\therefore \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1,1)\cdot(1,1)=-1+1=0$.

$\therefore AC\perp BC$.