

### 6.4.1-6.4.2 平面向量的应用

#### 【学习目标】

1. 能把物理问题转化为向量问题，通过向量的运算结果解释物理现象，以此培养学生的数学建模素养；
2. 会用向量方法解决简单的平面几何问题以及其他实际问题，体会向量在解决数学与实际问题中的作用；
3. 通过展示用向量解决问题的思路与方法，提升学生的数学运算素养，同时也为后续学习空间向量的运算并加以运用起到示范作用。

#### 【学习指导】

#### 一、向量在几何中的应用

由于向量的运算和数量积运算具有鲜明的几何背景，平面几何图形的许多性质，如全等、相似、长度、夹角等都可以由向量的线性运算及数量积表示出来，因此，平面几何中的许多问题都可用向量运算的方法加以解决。

#### 任务一、向量方法解决几何问题的方法及步骤

利用向量解决平面几何问题时，有两种思路：一种思路是选择一个基底(而选择的基底的长度和夹角应该是已知的，这样方便计算)，利用基向量表示相关的向量；另一种思路是建立坐标系，求出题目中涉及到的向量的坐标。这两种思路都是通过向量的计算获得几何命题的证明。下面通过具体实例，说明向量方法在平面几何中的应用。

例 1. 如图，已知平行四边形 ABCD，你能发现对角线 AC 和 BD 的长度与两条邻边 AB 和 AD 的长度之间的关系吗？

解析：方法一、选取  $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$  为基底，并设  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ,

则  $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$

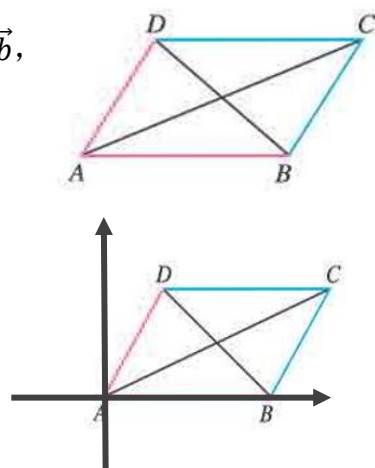
$$\therefore AC^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2;$$

$$DB^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2;$$

两式相加得

$$\therefore AC^2 + DB^2 = 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2)$$

$$\text{即 } AC^2 + DB^2 = 2(AB^2 + AD^2)$$



方法二：如图建立直角坐标系，并设  $A(0,0), B(b,0), D(d_1,d_2)$ , 则  $C(d_1+b,d_2)$ ,

$$\overrightarrow{AB} = (b,0), \overrightarrow{AD} = (d_1,d_2), \overrightarrow{AC} = (d_1+b,d_2), \overrightarrow{BD} = (d_1-b,d_2),$$

$$AB^2 + AD^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 = b^2 + d_1^2 + d_2^2$$

$$AC^2 + BD^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = (d_1 + b)^2 + d_2^2 + (d_1 - b)^2 + d_2^2 = 2(b^2 + d_1^2 + d_2^2)$$

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$$

向量解决几何问题就是把点、线、面等几何要素用向量加以表示，通过对这些向量之间的运算求解，把这些计算的结果翻译成关于点、线、面的相应结果，可以简单表述为：

“形到向量→向量的运算→向量和数到形”.

小结：用向量方法处理平面几何问题的步骤：

- ①建立平面几何与向量的联系，用向量表示问题中涉及的几何元素，将平面几何问题转化为向量问题；
- ②通过向量运算，研究几何元素之间的关系，如距离、夹角、垂直等问题；
- ③把向量的运算结果“翻译”成平面几何的形式.

## 任务二、向量方法解决平面几何问题的常见类型

已知线段 $AB$ 和 $CD$ ，利用向量方法可以解决 $AB$ 和 $CD$ 的平行、垂直、夹角及长度等问题.

探究、已知 $\overrightarrow{AB}=(x_1, y_1)$ ,  $\overrightarrow{CD}=(x_2, y_2)$ ,

问题 1. 如何证明 $AB$ 和 $CD$ 平行或共线？

$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{CD} (\lambda \in \mathbf{R}, \overrightarrow{CD} \neq \mathbf{0}) \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

问题 2. 如何证明 $AB$ 和 $CD$ 垂直？

$$AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

问题 3. 如何求 $AB$ 和 $CD$ 成的角的大小？

$$\cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CD}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

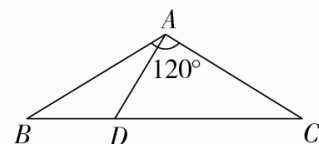
问题 4 如何求线段  $AB$  的长度？

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

例 2. 如图，在 $\triangle ABC$  中， $\angle BAC = 120^\circ$ ， $AB = AC = 3$ ，点  $D$  在线段  $BC$  上，且  $BD = \frac{1}{2}DC$ .

求：(1) $AD$  的长；(2) $\angle DAC$  的大小.

解析 (1) 设 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$ ,



$$\text{则 } \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{1}{3}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}.$$

$$\therefore |\vec{AD}|^2 = \vec{AD}^2 = \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right)^2 = \frac{4}{9}\vec{a}^2 + 2 \times \frac{2}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{9}\vec{b}^2 = \frac{4}{9} \times 9 + 2 \times \frac{2}{9} \times 3 \times 3 \times \cos 120^\circ + \frac{1}{9} \times 9 = 3. \text{ 故 } AD = \sqrt{3}.$$

(2) 设  $\angle DAC = \theta$ , 则  $\theta$  为向量  $\vec{AD}$  与  $\vec{AC}$  的夹角.

$$\therefore \cos \theta = \frac{\vec{AD} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AD}| |\vec{AC}|} = \frac{\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \cdot \vec{b}}{\sqrt{3} \times 3} = \frac{\frac{1}{3}\vec{b}^2 + \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b}}{3\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{3} \times 9 + \frac{2}{3} \times 3 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}{3\sqrt{3}} = 0,$$

$\therefore \theta = 90^\circ$ , 即  $\angle DAC = 90^\circ$ .

方法二、建立坐标系求出 A、B、C、D 点的坐标, 用坐标法求解 (过程略)

## 二、向量在物理中的应用

向量在物理中的应用, 实际上是先把物理问题转化为向量问题, 然后通过向量的运算解决转化而得到的向量问题, 最后再用所得的结果解释物理现象。下面通过实例来具体分析向量在解决物理问题中的应用。

例 3. 在日常生活中我们有这样的经验: 两个人共提一个旅行包, 两个拉力夹角越大越费劲; 在单杆上做引体向上运动, 两臂夹角越小越省力, 你能从数学角度解释这种现象吗?

分析: 不妨来研究共提旅行包的情况。如图, 设作用在旅行包上的两个拉力分别为  $F_1, F_2$ , 为方便起见不妨设  $|F_1| = |F_2|$ , 其夹角为  $\theta$ , 旅行包所受重力为  $G$ .

解析(1) 如图, 由力的平衡得  $F_1 + F_2 + G = 0$ , 设  $F_1, F_2$  的合力为  $F$ , 则  $F = -G$ .

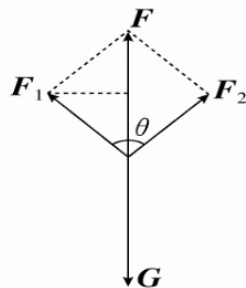
由  $F_1 + F_2 = F$  且  $|F_1| = |F_2|$ ,  $|F| = |G|$ , 解直角三角形得

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{1}{2}|F|}{|F_1|} = \frac{|G|}{2|F_1|}.$$

$$\therefore |F_1| = \frac{|G|}{2\cos \frac{\theta}{2}}, \quad \theta \in [0^\circ, 180^\circ].$$

由于函数  $y = \cos \frac{\theta}{2}$  在  $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$  上为减函数,

$\therefore \theta$  逐渐增大时,  $\cos \frac{\theta}{2}$  逐渐减小, 即  $\frac{|G|}{2\cos \frac{\theta}{2}}$  逐渐增大.



$\therefore \theta$  增大时,  $|\mathbf{F}_1|$  也增大. 即  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$  的夹角越大越费力, 夹角越小越省力.

同理, 在单杆上做引体向上运动, 两臂夹角越小越省力.

探究:

(1) 当  $\theta$  为何值时,  $|\mathbf{F}_1|$  最小? 最小值为多少?

(2)  $|\mathbf{F}_1|$  能等于  $|\mathbf{G}|$  吗? 为什么?

解析: (1) 由 (1) 可知  $|\mathbf{F}_1| = \frac{|\mathbf{G}|}{2\cos\frac{\theta}{2}}, \theta \in [0^\circ, 180^\circ]$ ,

当  $\theta=0^\circ$  时,  $|\mathbf{F}_1|$  有最小值为  $\frac{|\mathbf{G}|}{2}$

(2) 若  $|\mathbf{F}_1|$  能等于  $|\mathbf{G}|$ , 则  $2\cos\frac{\theta}{2}=1 \therefore \cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}, \theta \in [0^\circ, 180^\circ]$

$\therefore \frac{\theta}{2}=60^\circ, \therefore \theta=120^\circ$ .

你还能举出一些用向量知识求解物理中的问题吗?

如: 船在河中行驶、力对物体做功等。

用向量方法解决物理问题的一般思路:

① 问题转化, 即把物理问题转化为向量问题;

② 求解向量问题, 建立以向量为载体的数学模型, 通过向量运算解决转化而得到的向量问题;

③ 解释问题, 用数学模型的解来解释问题中所反映的物理现象.