**6.4.1-6.4.2平面向量的应用**

**【学习目标】**

1.能把物理问题转化为向量问题，通过向量的运算结果解释物理现象，以此培养学生的数学建模素养；

2.会用向量方法解决简单的平面几何问题以及其他实际问题，体会向量在解决数学与实际问题中的作用；

3.通过展示用向量解决问题的思路与方法，提升学生的数学运算素养，同时也为后续学习空间向量的运算并加以运用起到示范作用。

**【学习指导】**

一、向量在几何中的应用

由于向量的运算和数量积运算具有鲜明的几何背景，平面几何图形的许多性质，如全等、相似、长度、夹角等都可以由向量的线性运算及数量积表示出来，因此，平面几何中的许多问题都可用向量运算的方法加以解决。

**任务一、向量方法解决几何问题的方法及步骤**

利用向量解决平面几何问题时，有两种思路：一种思路是选择一个基底(而选择的基底的长度和夹角应该是已知的，这样方便计算)，利用基向量表示相关的向量；另一种思路是建立坐标系，求出题目中涉及到的向量的坐标．这两种思路都是通过向量的计算获得几何命题的证明．下面通过具体实例，说明向量方法在平面几何中的应用。

例1.如图，已知平行四边形ABCD，你能发现对角线AC和BD的长度与两条邻边AB和AD的长度之间的关系吗？

解析：方法一、选取$\left\{\vec{AB},\vec{AD}\right\}$为基底，并设$\vec{AB}=\vec{a},\vec{AD}=\vec{b}$，则$\vec{AC}=\vec{a}+\vec{b},\vec{DB}=\vec{a}-\vec{b}$

$∴AC^{2}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^{2}=\vec{a}^{2}+2\vec{a}∙\vec{b}+\vec{b}^{2}$;

$ DB^{2}=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^{2}=\vec{a}^{2}-2\vec{a}∙\vec{b}+\vec{b}^{2}$;

两式相加得

 $∴AC^{2}+ DB^{2}=$2$\left(\vec{a}^{2}+\vec{b}^{2}\right)$

 即 $AC^{2}+ DB^{2}=$2$\left(AB^{2}+AD^{2}\right)$

方法二：如图建立直角坐标系，并设$A\left(0,0\right) ,B\left(b,0\right)$,$ D\left(d\_{1},d\_{2}\right)$,则$C\left(d\_{1}+b,d\_{2}\right)$,

$\vec{AB}=\left(b,0\right),\vec{AD}=\left(d\_{1},d\_{2}\right),\vec{AC}=\left(d\_{1}+b,d\_{2}\right),\vec{BD}=\left(d\_{1}-b,d\_{2}\right)$,

$$AB^{2}+AD^{2}=\vec{AB}^{2}+\vec{AD}^{2}=b^{2}+d\_{1}^{2}+d\_{2}^{2}$$

$$AC^{2}+BD^{2}=\vec{AC}^{2}+\vec{BD}^{2}=\left(d\_{1}+b\right)^{2}+d\_{2}^{2}+\left(d\_{1}-b\right)^{2}+d\_{2}^{2}=2(b^{2}+d\_{1}^{2}+d\_{2}^{2})$$

$AC^{2}+BD^{2}=$2($AB^{2}+AD^{2})$

向量解决几何问题就是把点、线、面等几何要素用向量加以表示，通过对这些向量之间的运算求解，把这些计算的结果翻译成关于点、线、面的相应结果，可以简单表述为：

**“形到向量→向量的运算→向量和数到形”．**

小结：用向量方法处理平面几何问题的步骤：

 ①建立平面几何与向量的联系，用向量表示问题中涉及的几何元素，将平面几何问题转化为向量问题；

②通过向量运算，研究几何元素之间的关系，如距离、夹角、垂直等问题；

③把向量的运算结果“翻译”成平面几何的形式．

任务二、向量方法解决平面几何问题的常见类型

已知线段$AB和CD$，利用向量方法可以解决$AB和CD$的平行、垂直、夹角及长度等问题．

探究、已知$\vec{AB}$＝(*x*1，*y*1)，$\vec{CD}$＝(*x*2，*y*2)，

问题1. 如何证明$AB和CD$平行或共线？

 $AB∥CD$⇔ $\vec{AB}$***∥***$\vec{CD}$⇔$\vec{AB}$＝*λ*$\vec{CD}$(*λ*∈**R**，$\vec{CD}$***≠0***)⇔*x*1*y*2－*x*2*y*1＝0

问题2. 如何证明$AB和CD$垂直**？**

 $AB⊥CD$⇔ $\vec{AB}$**⊥**$\vec{CD}$⇔$\vec{AB}$***·***$\vec{CD}$＝0⇔*x*1*x*2＋*y*1*y*2＝0

问题3. 如何求$AB和CD$成的角的大小？

 cos〈$\vec{AB}$，$\vec{CD}$〉＝$\frac{\vec{AB}∙\vec{CD}}{\left|\vec{AB}\right|\left|\vec{\vec{CD}}\right|}$＝$\frac{x1x2＋y1y2}{\sqrt{x\_{1}^{2}+y\_{1}^{2}}∙\sqrt{x\_{2}^{2}+y\_{2}^{2}}}$

问题4 如何求线段AB的长度？

 *AB*＝|$\vec{AB}$|$＝\sqrt{x\_{1}^{2}+y\_{1}^{2}}$

例2.如图，在△*ABC*中，∠*BAC*＝120°，*AB*＝*AC*＝3，点*D*在线段*BC*上，且*BD*＝*DC．*

求：(1)*AD*的长；(2)∠*DAC*的大小．

解析 (1)设＝***a***，＝***b***，

则＝＋＝＋＝＋(－)＝＋＝***a***＋***b***.

∴||2＝2＝2＝***a***2＋2×***a***·***b***＋***b***2＝×9＋2××3×3×cos120°＋×9＝3.故*AD*＝.

(2)设∠*DAC*＝*θ*，则*θ*为向量与的夹角．

∵cos*θ*＝＝＝＝＝0，

∴*θ*＝90°，即∠*DAC*＝90°.

方法二、建立坐标系求出A、B、C、D点的坐标，用坐标法求解（过程略）

二、向量在物理中的应用

 向量在物理中的应用，实际上是先把物理问题转化为向量问题，然后通过向量的运算解决转化而得到的向量问题，最后再用所得的结果解释物理现象。下面通过实例来具体分析向量在解决物理问题中的应用。

例3．在日常生活中我们有这样的经验：两个人共提一个旅行包，两个拉力夹角越大越费劲；在单杆上做引体向上运动，两臂夹角越小越省力，你能从数学角度解释这种现象吗？

分析：不妨来研究共提旅行包的情况。如图，设作用在旅行包上的两个拉力分别为***F***1，***F***2，为方便起见不妨设|***F***1|＝|***F***2|，其夹角为*θ*，旅行包所受重力为***G***.

解析(1)如图，由力的平衡得***F***1＋***F***2＋***G***＝0，设***F***1，***F***2的合力为***F***，则***F***＝－***G***.

由***F***1＋***F***2＝***F***且|***F***1|＝|***F***2|，|***F***|＝|***G***|，解直角三角形得cos＝＝.

∴|***F***1|＝，*θ*∈[0°，180°]．

由于函数*y*＝cos在*θ*∈[0°，180°]上为减函数，

∴*θ*逐渐增大时，cos逐渐减小，即逐渐增大．

∴*θ*增大时，|***F***1|也增大．即***F***1，***F***2的夹角越大越费力，夹角越小越省力.

同理，在单杆上做引体向上运动，两臂夹角越小越省力.

探究：

（1）当*θ*为何值时，|***F***1|最小？最小值为是多少？

（2） |***F***1|能等于|***G***|吗？为什么？

解析：(1)由（1）可知|***F***1|＝$\frac{\left|G\right|}{2cos\frac{θ}{2}}$，*θ*∈$\left[0^{°},180^{°}\right]$，

当*θ*＝0°时，|***F***1|有最小值为

 (2)若 |***F***1|能等于|***G***|，则$2cos\frac{θ}{2}$=1∴cos$\frac{θ}{2}$=$\frac{1}{2}，θ\in \left[0^{°},180^{°}\right]$

∴$\frac{θ}{2}$=60°，∴*θ*=$120^{°}$．

你还能举出一些用向量知识求解物理中的问题吗？

如：船在河中行驶、力对物体做功等。

用向量方法解决物理问题的一般思路：

①问题转化，即把物理问题转化为向量问题；

②求解向量问题，建立以向量为载体的数学模型，通过向量运算解决转化而得到的向量问题；

③解释问题，用数学模型的解来解释问题中所反映的物理现象．