高一年级数学 6.3.5 平面向量数量积的坐标表示

学习指南

一、 学习目标

1、理解向量数量积坐标表示的推导过程，能运用数量积的坐标表示进行向量数量积的运算；

2、能根据向量的坐标计算向量的模，并推导平面内两点间的距离公式；

3、能根据向量的坐标求向量的夹角及判定两个向量垂直．并简单的应用，体会运用向量工具探索问题的简洁性.

二、学法指导

向量的运算有向量的加、减，数乘运算，数量积运算，在学习了平面向量基本定理后，掌握了向量的坐标表示.我们也掌握了向量的加、减，数乘运算的坐标表示，并得出了两向量平行的充要条件的坐标表示.那么向量的数量积的坐标表示是什么？向量数量积的坐标表示为我们求向量的那些问题可以带来方便？借鉴前面学习的思路和研究的方法，尝试对向量数量积的坐标表示进行推导，看看你能推导出哪些有价值的结论.

思考：复习提问数量积及其性质，复习向量的加、减、数乘的坐标表示.

向量运算及其性质	数学符号	坐标表示
向量的加法、减法	$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\left(x_1+x_2,y_1+y_2\right)$
向量的数乘	$\lambda\boldsymbol{a}$	$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\left(x_1,y_1\right)$
向量的数量积	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$	?
向量的平行	$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\left(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}\right)$	$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$
向量的垂直	$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$	?
向量的模	$\boldsymbol{a}^2=\|\boldsymbol{a}\|^2;\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$	?
向量的夹角	$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$	?

任务一：探究两个向量数量积的坐标表示

问题 1：已知$\boldsymbol{a}=\left(x_1,y_1\right),\boldsymbol{b}=\left(x_2,y_2\right)$，怎样用$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的坐标表示$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$呢？

解析：根据向量的坐标表示我们有 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}, b=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}$，且 $\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=1,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0$

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\left(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}\right)\cdot\left(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}\right)=x_1x_2\boldsymbol{i}^2+x_1y_2\boldsymbol{j}+y_1x_2\boldsymbol{i}+y_1y_2\boldsymbol{j}^2$

因为 $\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=1,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0$

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$

追问 1：你能用语言描述吗？

语言描述：两个向量的数量积等于它们对应坐标的乘积的和.

任务二：利用两向量数量积坐标表示得出向量数量积相关结论并应用

问题 2：设 $\boldsymbol{a}=(x,y)$，则用坐标怎样表示 $|\boldsymbol{a}|^2$ 和 $|\boldsymbol{a}|$？

向量模的坐标表示： $|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|=x^2+y^2$； $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$

问题 3：向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点和终点坐标分别为 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，$|\boldsymbol{a}|$ 如何用起点和终点坐标表示？

$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1,y_2-y_1\right)$； $|\boldsymbol{a}|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_2-x\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$

平面内两点间的距离公式： $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_2-x\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$

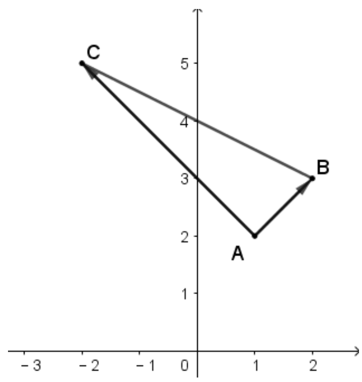
问题 4：设 $\boldsymbol{a}=\left(x_1,y_1\right),\boldsymbol{b}=\left(x_2,y_2\right)$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件如何用坐标表示？

向量垂直的坐标表示为： $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

例 1： 若点 $A(1,2),B(2,3),C(-2,5)$，则 ΔABC 是什么形状？证明你的猜想.

如图，在平面直角坐标系下画出点 A,B,C，我们发现 ΔABC 是直角三角形.

证明如下：



因为 $\overrightarrow{AB}=\left(2-1,3-2\right)=(1,1)$

$\overrightarrow{AC}=\left(-2-1,5-2\right)=\left(-3,3\right)$

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times\left(-3\right)+1\times 3=0$

于是 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$

因此 ΔABC 是直角三角形.

问题 5：设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，θ 是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角，设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，那么 $\cos\theta$ 如何用坐标表示？

向量夹角的坐标表示为： $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

完成课前表格相关内容：

向量运算及其性质	数学符号	坐标表示
向量的加法、减法	$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$
向量的数乘	$\lambda\boldsymbol{a}$	$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(x_1,y_1)$
向量的数量积	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$
向量的平行	$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$	$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$
向量的垂直	$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$	$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$
向量的模	$\boldsymbol{a}^2=\|\boldsymbol{a}\|^2$；$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$	$\|\boldsymbol{a}\|^2=\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{a}\|=x^2+y^2$；$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{x^2+y^2}$ $\|\boldsymbol{a}\|=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-y_1)^2}$
向量的夹角	$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$	$\cos\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

知识应用：

例 2：已知向量 $\boldsymbol{a}=(5,-7),\boldsymbol{b}=(-6,-4)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角

解：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=5\times(-6)+(-7)\times(-4)\\&=-30+28\\&=-2\end{aligned}$$

因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5^2+(-7)^2}=\sqrt{74},|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-6)^2+(-4)^2}=\sqrt{52}$

可得

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-2}{\sqrt{74}\times\sqrt{52}}\approx-0.03$$

$$\theta\in[0,2\pi]$$

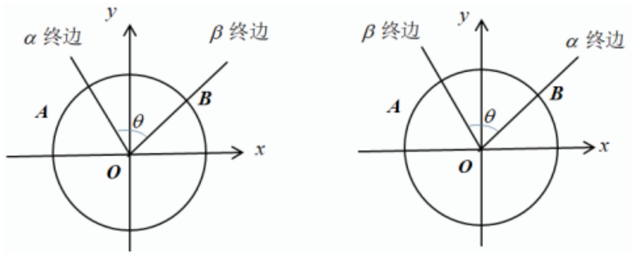
利用计算器中的“$\cos^{-1}$”键，得到$\theta \approx 92^{\circ}$.

例 3：用向量方法证明两角差的余弦公式$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

追问 1：如何表示出任意角α，β？如何表示出α，β的正余弦？

根据正弦、余弦的定义，在平面直角坐标系Oxy内做单位圆O，以x轴的非负半轴为始边作角α，β，它们的终边与单位圆O的交分别为A,B，A,B两点的坐标可以用α，β的正弦、余弦表示，

即　$A(\cos\alpha,\sin\alpha),B(\cos\beta,\sin\beta)$，向量数量积的坐标表示有：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$



$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\angle AOB=\cos\angle AOB$

设α与β夹角为θ，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\angle AOB=\cos\theta$

因此有$\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

追问 2：θ与角$\alpha-\beta$什么关系？

由图可知（1）知$\alpha=2k\pi+\beta+\theta$，由图（2）知$\alpha=2k\pi+\beta-\theta$

因此$\alpha-\beta=2k\pi\pm\theta$

因此　$\cos(\alpha-\beta)=\cos(2k\pi\pm\theta)=\cos\theta$

所以　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

证明：如图，在平面直角坐标系在平面直角坐标系Oxy内的单位圆O中，以x轴的非负半轴为始边作角α,β，它们的终边分别与单位圆交于点A,B. 则

$\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\sin\alpha),\overrightarrow{OB}=(\cos\beta,\sin\beta)$

由向量数量积的坐标表示，有$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

设$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$ 的夹角为θ，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta=\cos\theta$

所以$\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

由图可知$\alpha-\beta=2k\pi\pm\theta,k\in Z$

因此$\cos(\alpha-\beta)=\cos\theta$

于是$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

从证明恒等式两侧入手：

在平面直角坐标系在平面直角坐标系Oxy 内的单位圆O 中，以x 轴的非负半轴为始边作角α,β，它们的终边分别与单位圆交于点A,B. 我们得到

$\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\sin\alpha),\overrightarrow{OB}=(\cos\beta,\sin\beta)$

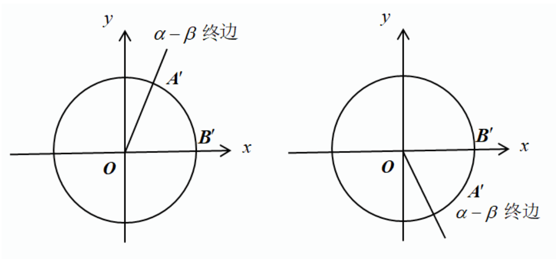
由向量数量积的坐标表示，有$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

公式左侧为$\cos(\alpha-\beta)$

追问 3：如何表示出角$\alpha-\beta$ 及$\cos(\alpha-\beta)$？

根据正弦、余弦定义，同样的，在平面直角坐标系Oxy 内的单位圆O 中，以x 轴的非负半轴为始边作角$\alpha-\beta$ 角的始边与终边分别与单位圆交于点A',B'，这样交点坐标

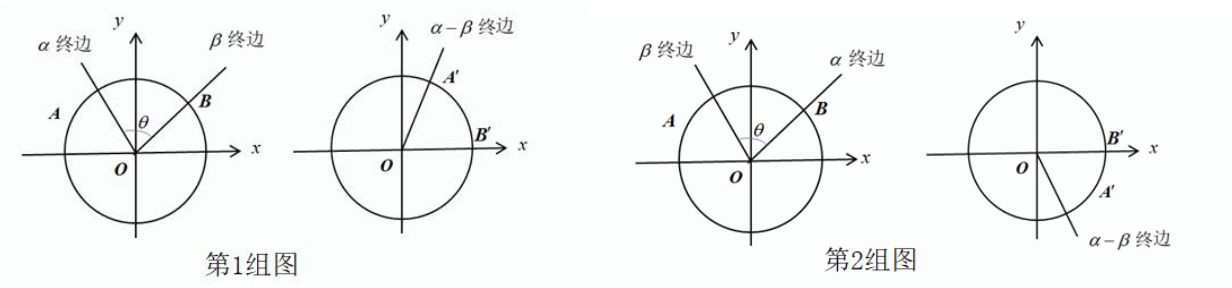
$A'(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta)),B'(1,0)$ ，因此得到$\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}=\cos(\alpha-\beta)$



$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta=\cos\theta$ ； $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}=\cos(\alpha-\beta)$

说明$\cos\angle AOB=\cos(\alpha-\beta)$ 即可.

追问 4：θ 与角$\alpha-\beta$ 什么关系？



由图可知：$\alpha-\beta=2k\pi\pm\theta$

因此 $\cos(\alpha-\beta)=\cos(2k\pi\pm\theta)=\cos\theta$

因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cos\theta$；$\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}=|\overrightarrow{OA'}|\cdot|\overrightarrow{OB'}|\cos(\alpha-\beta)$

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}$ 即 $\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta$

证明过程：

如图，在平面直角坐标系在平面直角坐标系 Oxy 内的单位圆 O 中，以 x 轴的非负半轴为始边作角 α,β，它们的终边分别与单位圆交于点 A,B．以 x 轴的非负半轴为始边，作角 $\alpha-\beta$，它的始边与终边分别与单位圆交于 A',B'，设向量 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 θ

则 $\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\sin\alpha),\overrightarrow{OB}=(\cos\beta,\sin\beta)$；$\overrightarrow{OA'}=(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta)),\overrightarrow{OB'}=(1,0)$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos\beta\cos\alpha+\sin\alpha,\sin\beta$

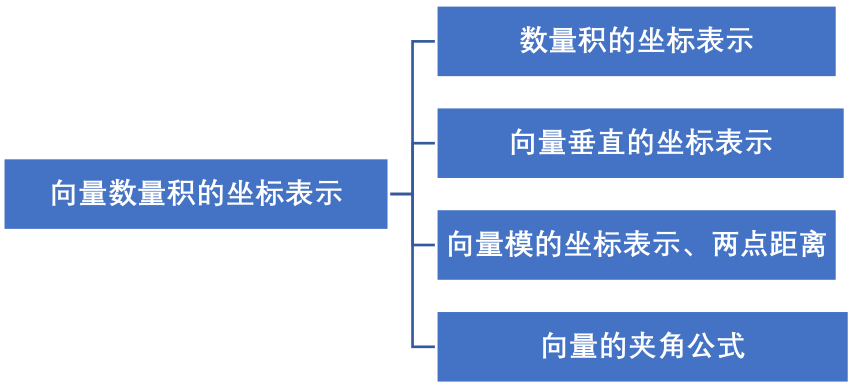
$\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}=\cos(\alpha-\beta)$

因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos\theta$；$\alpha-\beta=\pm\theta+2k\pi,k\in Z$

因此 $\cos(\alpha-\beta)=\cos(2k\pi\pm\theta)=\cos\theta$

于是 $\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta$．

课堂小结：



任务四：反思小节，将本节课所学知识归入自己的知识体系

通过本节课，我们能将向量的线性运算和数量积运算用坐标表示，丰富了解决问题的方法，将本节课的内容以及前面的学习进行梳理，整理出向量的符号、几何、坐标三种表示的等相关运算和结论，有助于对向量运算的整体把握和认识.