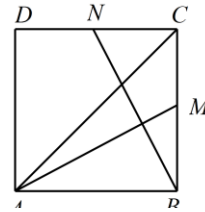


平面向量数乘运算的坐标表示拓展作业

1. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, M, N 分别是 BC, CD 的中点, 若 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AM} + \mu \overrightarrow{BN}$, 则 $\lambda + \mu =$ _____.

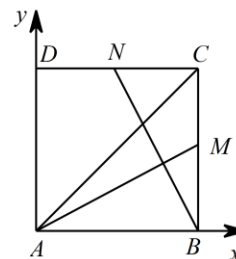


$\frac{8}{5}$. 【解析】以 AB, AD 为坐标轴建立平面直角坐标系, 如图:

设正方形边长为 1, 则 $\overrightarrow{AM} = (1, \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{BN} = (-\frac{1}{2}, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 1)$,

因为 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AM} + \mu \overrightarrow{BN}$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \lambda - \frac{1}{2}\mu = 1, \\ \frac{1}{2}\lambda + \mu = 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \lambda = \frac{6}{5}, \\ \mu = \frac{2}{5}, \end{cases} \text{ 所以 } \lambda + \mu = \frac{8}{5}.$$



2. 若三点 $A(2,2)$, $B(a,0)$, $C(0,b)$ ($ab \neq 0$) 共线, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的值为_____.

$\frac{1}{2}$ 【解析】 $\overrightarrow{AB} = (a-2, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, b-2)$, 依题意, 有 $(a-2)(b-2) - 4 = 0$, 即 $ab - 2a - 2b = 0$, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$.

3. 已知 O 为坐标原点, 向量 $\overrightarrow{OA} = (2,3)$, $\overrightarrow{OB} = (4,-1)$, 且 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$, 则 $|\overrightarrow{OP}| =$ _____.

$\frac{7}{2}$ 【解析】在平面直角坐标系 xOy 中, 设 $P(x,y)$, 由题意可得 A, B 两点的坐标分别为 $(2,3), (4,-1)$,

由 $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$ 可得 $(x-2, y-3) = 3(4-x, -1-y)$, 根据向量相等的概念得 $\begin{cases} x-2 = 12-3x, \\ y-3 = -3y-3, \end{cases}$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = \frac{7}{2}, \\ y = 0, \end{cases} \text{ 故 } |\overrightarrow{OP}| = \frac{7}{2}.$$

4. 设两个向量 $\vec{a} = (\lambda + 2, \lambda^2 - \cos^2 \alpha)$ 和 $\vec{b} = (m, \frac{m}{2} + \sin \alpha)$, 其中 λ, m, α 为实数. 若 $\vec{a} = 2\vec{b}$, 求 $\frac{\lambda}{m}$ 的取值范围.

解: 由 $\vec{a} = 2\vec{b}$, 得 $\begin{cases} \lambda + 2 = 2m, \\ \lambda^2 - \cos^2 \alpha = m + 2\sin \alpha, \end{cases}$ 消去 λ 并整理, 得 $(2m-2)^2 - m = \cos^2 \alpha + 2\sin \alpha$,

即 $4m^2 - 9m + 4 = -\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha + 1 = -(\sin \alpha - 1)^2 + 2$. 由 $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$, 得 $-2 \leq$

$-(\sin \alpha - 1)^2 + 2 \leq 2$, 从而 $-2 \leq 4m^2 - 9m + 4 \leq 2$, 解得 $\frac{1}{4} \leq m \leq 2$, 则 $-6 \leq 2 - \frac{2}{m} \leq 1$.

由 $\frac{\lambda}{m} = \frac{2m-2}{m} = 2 - \frac{2}{m}$, 得 $-6 \leq \frac{\lambda}{m} \leq 1$.