

6.3.4 平面向量数乘运算的坐标表示

学习指南答案

一、学习目标

- 1.能利用平面向量坐标的定义，得出平面向量数乘运算的坐标表示；
- 2.利用向量数乘运算的坐标表示，推出向量共线定理的坐标形式；
- 3.运用向量共线定理的坐标表示解决向量共线、三点共线，求点的坐标等问题.

二、学法指导

本节课学习平面向量数乘运算的坐标表示。

任务一：探究平面向量数乘运算的坐标表示

问题 1：已知 $\vec{a} = (x, y)$ ，你能得到 $\lambda \vec{a}$ 的坐标吗？这个过程需要用到哪些知识？怎样叙述这个结论？

答： $\lambda \vec{a} = \lambda(x\vec{i} + y\vec{j}) = \lambda x\vec{i} + \lambda y\vec{j}$ ， $\therefore \lambda \vec{a} = (\lambda x, \lambda y)$ 用到坐标的定义、数乘运算的分配律、结合律。结论：实数与向量的积的坐标等用这个实数乘原来向量的相应坐标。

例1. 已知 $\vec{a} = (2, 1), \vec{b} = (-3, 4)$ ，求 $3\vec{a} + 4\vec{b}$ 的坐标。

解： $3\vec{a} + 4\vec{b} = 3(2, 1) + 4(-3, 4) = (6, 3) + (-12, 16) = (-6, 19)$

任务二：探究共线向量的坐标表示

问题 2：由向量的数乘运算我们还得到了共线向量定理，那么这个定理用坐标如何表示呢？

设 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$ ，若向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线（其中 $\vec{b} \neq \vec{0}$ ），则这两个向量的坐标应满足什么关系？

答：由共线向量定理可设 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ，则 $(x_1, y_1) = \lambda(x_2, y_2)$ ，即 $\begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \end{cases}$ 消去 λ ，

得 $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ 。

例 2. 已知 $\vec{a} = (4, 2), \vec{b} = (6, y)$ ，且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，求 y 。

解： $\because \vec{a} \parallel \vec{b} \therefore 4y - 2 \times 6 = 0$ ，解得 $y = 3$ 。

例 3. 已知 $A(-1, -1), B(1, 3), C(2, 5)$, 判断 A, B, C 三点之间的关系.

解: 在平面直角坐标系中作出三点, 观察图形, 我们猜想三点共线.

$\because \overrightarrow{AB} = (1 - (-1), 3 - (-1)) = (2, 4), \overrightarrow{AC} = (2 - (-1), 5 - (-1)) = (3, 6)$ 又 $\because 2 \times 6 - 4 \times 3 = 0 \therefore \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$ 又因为直线 AB 和 AC 有公共点 A , 所以 A, B, C 三点共线.

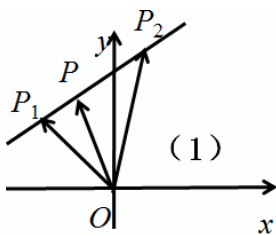
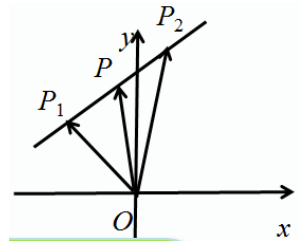
例 4. 设点 P 是线段 P_1P_2 上的一点, 点 P_1, P_2 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

(1) 当 P 是线段 P_1P_2 的中点时, 求点 P 的坐标;

(2) 当 P 是线段 P_1P_2 的一个三等分点时, 求点 P 的坐标.

解: (1) 如图所示, 由向量的线性运算可知

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \quad \text{所以 } P \text{ 点的坐标是 } \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$



(2) 有两种情况,

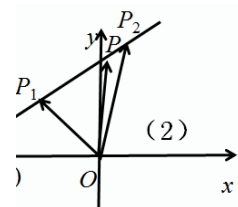
当 $\overrightarrow{P_1P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PP_2}$ 时, 如左图 1

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OP_2} = \left(\frac{2x_1 + x_2}{3}, \frac{2y_1 + y_2}{3}\right) \end{aligned}$$

同理当

$\overrightarrow{P_1P} = 2\overrightarrow{PP_2}$ 时, 可求得 $P\left(\frac{x_1 + 2x_2}{3}, \frac{y_1 + 2y_2}{3}\right)$

综上, P 的坐标为 $\left(\frac{2x_1 + x_2}{3}, \frac{2y_1 + y_2}{3}\right)$ 或 $\left(\frac{x_1 + 2x_2}{3}, \frac{y_1 + 2y_2}{3}\right)$



任务三: 对例 4 的拓展探究

问题 3: 已知点 P_1, P_2 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

且 $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2}$, 如何求点 P 的坐标?

答: 由 $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2}$ 得, $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1} = \lambda (\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP})$ (O 为原点).

于是 $(1 + \lambda) \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda \overrightarrow{OP_2}$,

$$\text{因此 } \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OP_1} + \lambda \overrightarrow{OP_2}}{1 + \lambda},$$

这就是定比分点公式的向量形式. 为了得到公式的坐标形式, 我们把向量的坐标代入:

设 $P(x, y)$, 则 $\overrightarrow{OP_1} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{OP_2} = (x_2, y_2)$, $\overrightarrow{OP} = (x, y)$ 于是有

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases} \quad \text{这就是线段的定比分点公式. 当 } \lambda = 1 \text{ 时, 就得到中点坐标公式.}$$

推导过程中之所以把 $\overrightarrow{P_1P}$ 变为 $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1}$, 是因为 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标与点 P 的坐标是相同的, 这样就把向量与点的坐标联系起来了.

任务四：反思小结，将本节课所学知识归入自己的知识体系

本节课学了哪些知识？你能体会坐标法给我们解决问题带来了哪些方便吗？

1. $\lambda \vec{a} = (\lambda x, \lambda y)$, 2. $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ 坐标的引入使得向量问题完全的代数化, 淡化了对形的要求, 我们可以直接运用代数运算来解决复杂的问题, 例如: 线线平行, 三点共线, 线段的等分等等.