



朝阳区线上课堂·高一年级数学

6.3.1平面向量基本定理

北京市陈经纶中学 宋其云

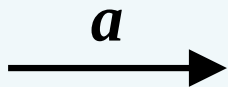


1. 借助力的分解理解平面向量基本定理的内容及其价值；
2. 了解向量的一组基底的含义，当一组基底选定后，会用这组基底表示其他向量；
3. 会运用平面向量基本定理解决简单平面几何问题.

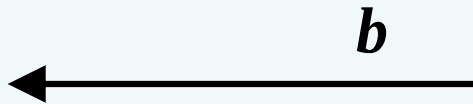


问题 1: 观察向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ ，指出向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 的位置关系；

若 $|\mathbf{b}| = 2|\mathbf{a}|$ ，用向量 $\mathbf{a}$ 表示向量 $\mathbf{b}$ 。



$$\mathbf{b} = -2\mathbf{a}.$$



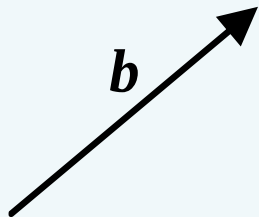
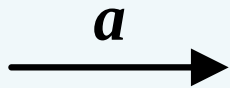


问题 2: 向量共线定理的内容是什么?

向量 $\mathbf{a} (\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$ 与 $\mathbf{b}$ 共线, 当且仅当存在唯一一个实数 λ , 使得 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$.

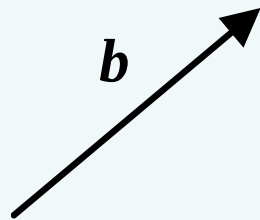
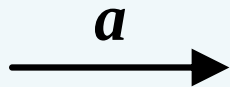


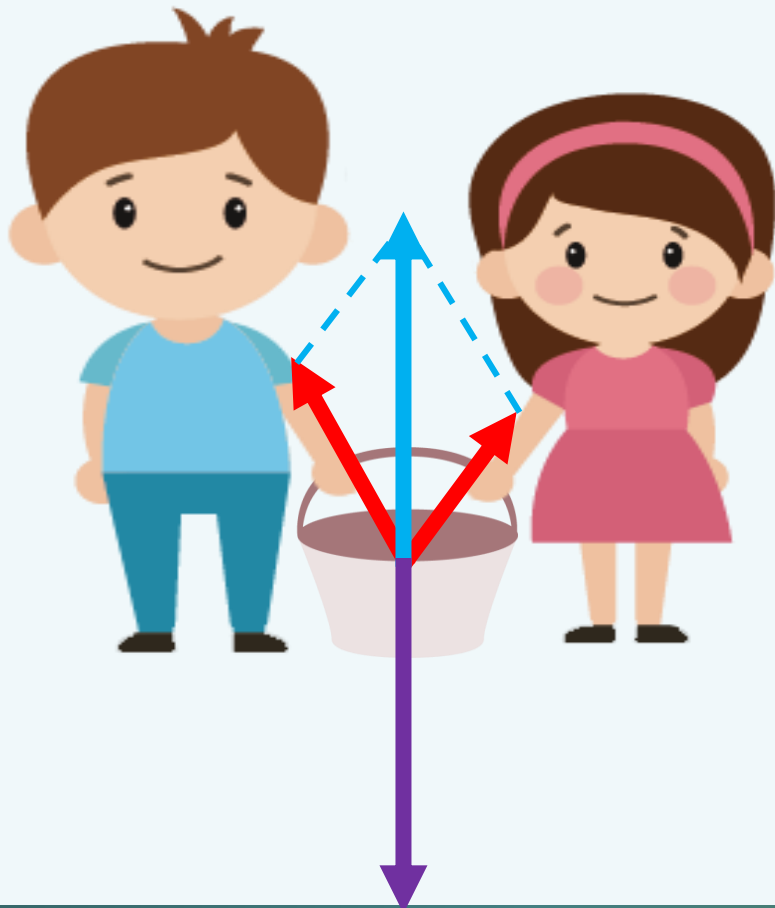
问题 3: 能用向量 $\boldsymbol{a}$ 表示平面内的任意向量 $\boldsymbol{b}$ 吗？



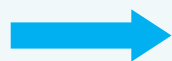


问题 3: 能用向量 $\boldsymbol{a}$ 表示平面内的任意向量 $\boldsymbol{b}$ 吗？那怎么表示平面内任意一个向量呢？能用怎样的几个向量表示？你是怎么想到的？

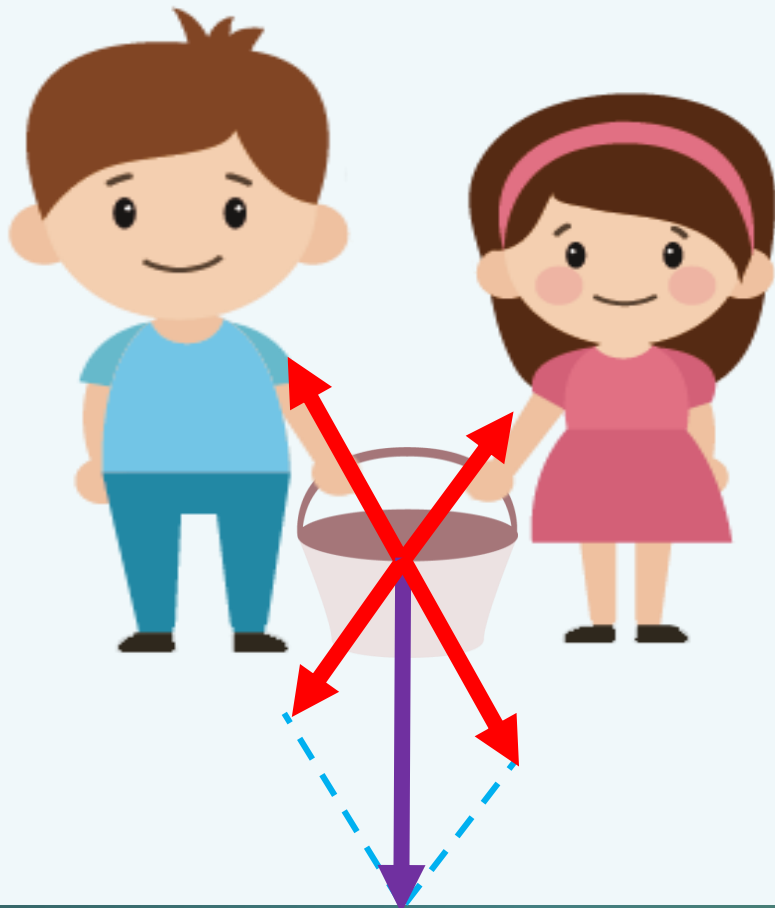




向量的加法



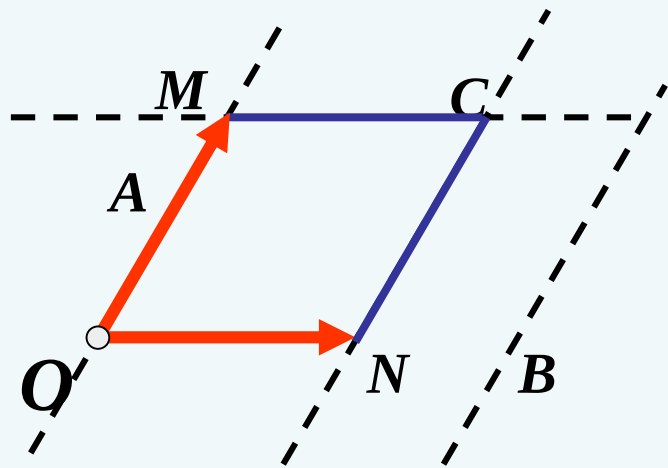
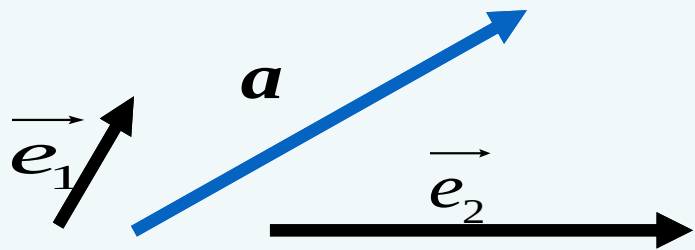
合力



力的合成 $\longleftrightarrow$ 力的分解



问题 4: 如图，已知不共线的两个向量 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ ，及这个平面内的向量 $\mathbf{a}$ ，你能用 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 表示向量 $\mathbf{a}$ 吗？

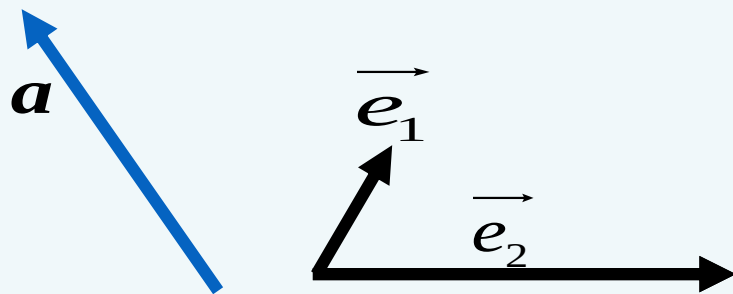


结论: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ ，所以 $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2$.





问题 5: 如图，已知不共线的两个向量 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ ，及这个平面内的向量 $\mathbf{a}$ ，你能用 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 表示向量 $\mathbf{a}$ 吗？向量 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 能表示该平面内的任意一个向量吗？





问题 6: 若基底 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 确定，向量 $\mathbf{a}$ 确定， λ_1 、 λ_2 是否也唯一确定？你能证明你的结论吗？

已知不共线的两个向量 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ ，及这个平面内的向量 $\mathbf{a}$ ，若 $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2$ ，证明 λ_1 、 λ_2 唯一。





证明：假设存在 λ_3 、 λ_4 ，使得 $\mathbf{a} = \lambda_3 \mathbf{e}_1 + \lambda_4 \mathbf{e}_2$ ，且 $\lambda_3 \neq \lambda_1$ 或 $\lambda_4 \neq \lambda_2$ ，

则 $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 = \lambda_3 \mathbf{e}_1 + \lambda_4 \mathbf{e}_2$ ， $\therefore (\lambda_1 - \lambda_3) \mathbf{e}_1 = (\lambda_4 - \lambda_2) \mathbf{e}_2$

$\because \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 不共线， $\therefore \lambda_1 = \lambda_3, \lambda_2 = \lambda_4$

假设不成立， λ_1 、 λ_2 唯一



平面内任意一个向量都能分解成不共线的两个向量的线性表示，你能试着用数学语言叙述一下平面向量的分解吗？



如果 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是平面内两个不共线的向量，那么对于这一平面内的任一向量 $\mathbf{a}$ ，有且只有一对实数 λ_1, λ_2 ，使得：

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2$$

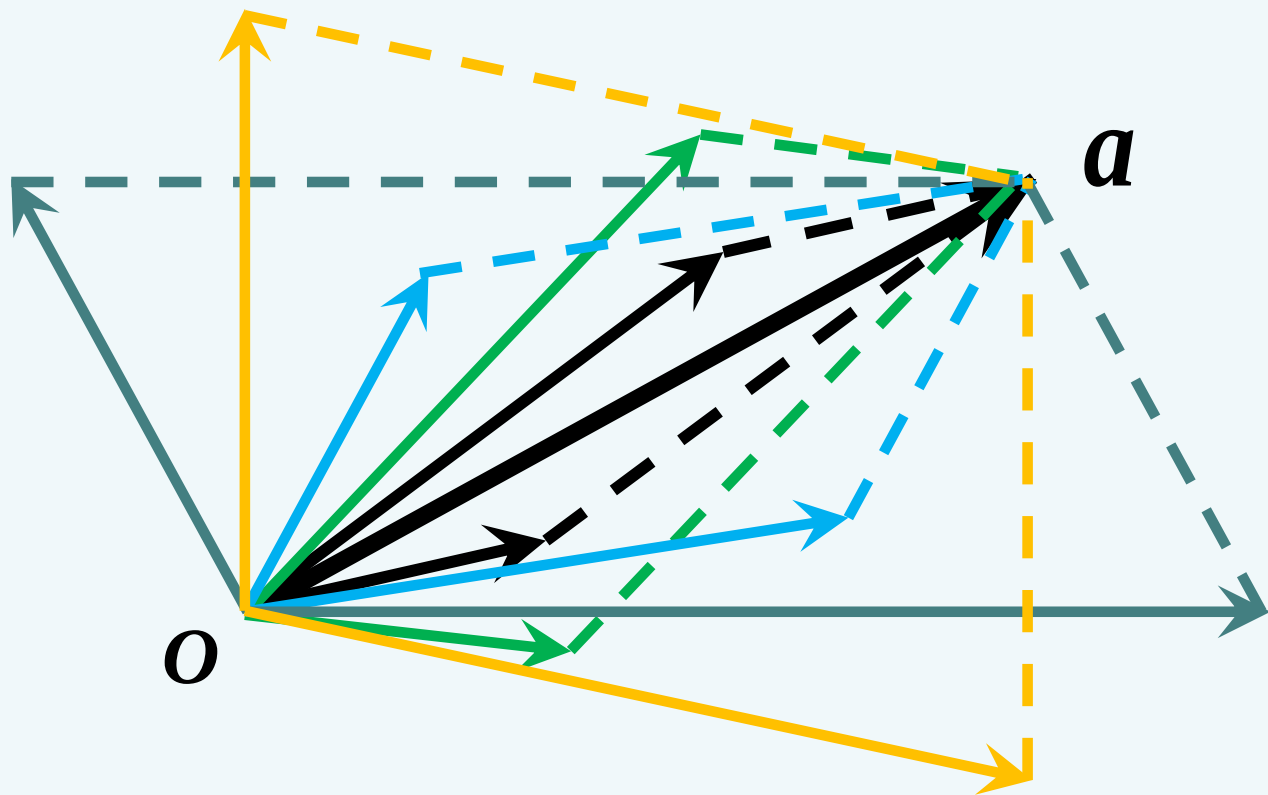
不共线向量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 叫做这一平面内所有向量的一组基底。

平面向量基本定理的功能：向量的分解



辨析 1 关于基底：

1. 基底 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 唯一吗？
2. 基底 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 应满足什么条件？





辨析 2 关于 λ_1 、 λ_2 ：

1. 是实数.
2. 基底、平面向量给定时，分解形式唯一，即 λ_1 、 λ_2 由 $\mathbf{a}$ ， $\mathbf{e}_1$ ， $\mathbf{e}_2$ 唯一确定的数量.



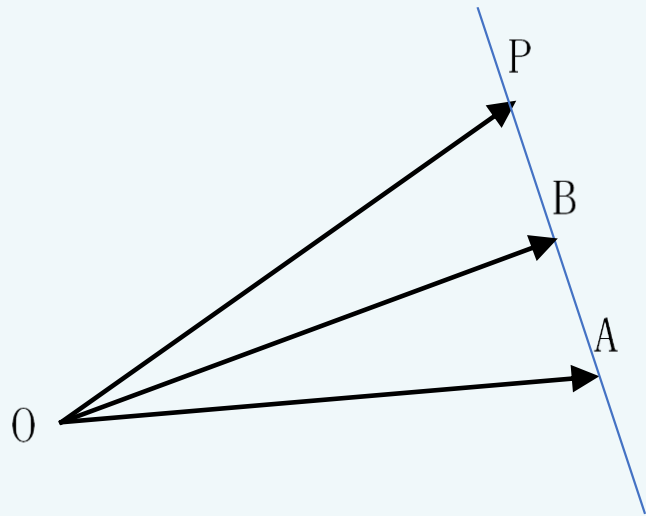
例 1 如图, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 不共线, 且 $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ ($t \in R$), 用 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$.

解: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$

$$= \overrightarrow{OA} + t(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} - t\overrightarrow{OA}$$

$$= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$



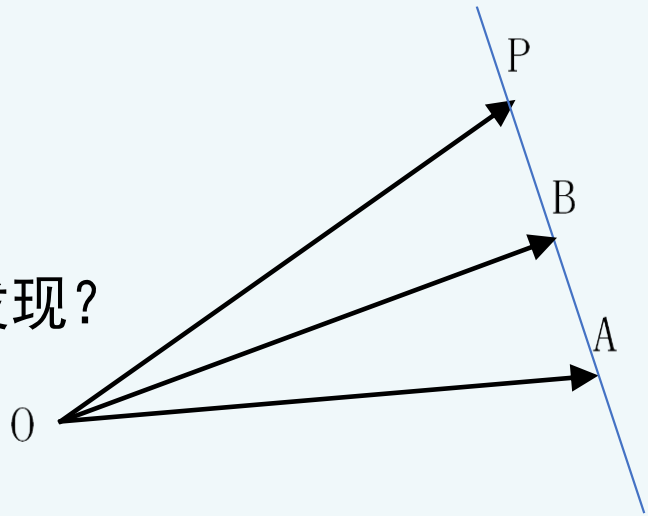
说明: 利用向量的有关**运算**则将相关向量用基底表示



例 1 如图, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 不共线, 且 $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ ($t \in R$), 用 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$.

观察 $\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$

及 P, A, B 三点的位置关系, 你有什么发现?



结论: 如果 $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$,

则 P, A, B 三点共线的充要条件为 $m + n = 1$.

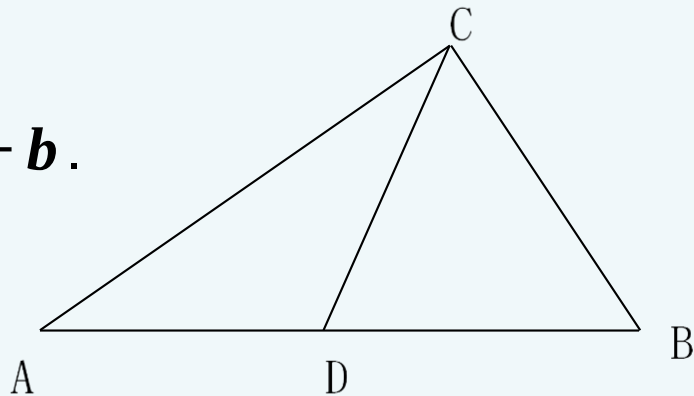


例 2 如图， CD 是 $\triangle ABC$ 的中线， $CD = \frac{1}{2}AB$ ，用向量方法证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

证明一：设 $\overrightarrow{CD} = \mathbf{a}$ ， $\overrightarrow{DA} = \mathbf{b}$ ，则 $\overrightarrow{CA} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2$$





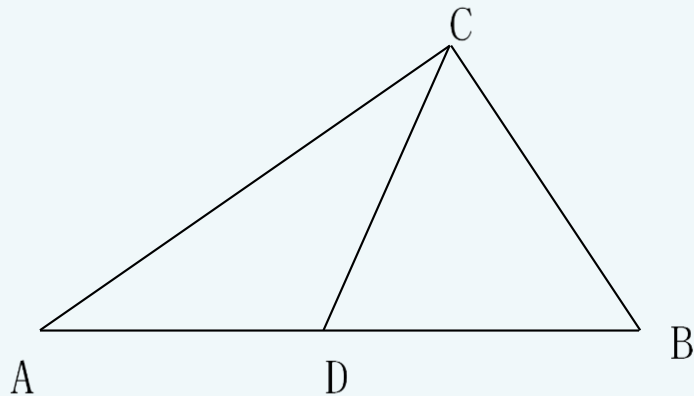
例 2 如图， CD 是 $\triangle ABC$ 的中线， $CD = \frac{1}{2}AB$ ，用向量方法证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

因为 $CD = \frac{1}{2}AB$ ，所有 $|a| = |b|$.

因此 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2 - b^2 = 0$ ，即 $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$

于是 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

说明：借助向量表征几何元素，利用向量运算解决几何问题.





例 2 如图, CD 是 $\triangle ABC$ 的中线, $CD = \frac{1}{2}AB$, 用向量方法证明 $\triangle ABC$

是直角三角形.

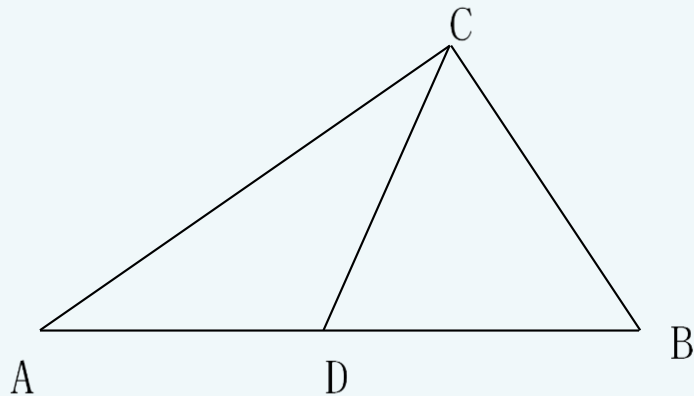
思路二: 由向量的加法不难得出, $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$,

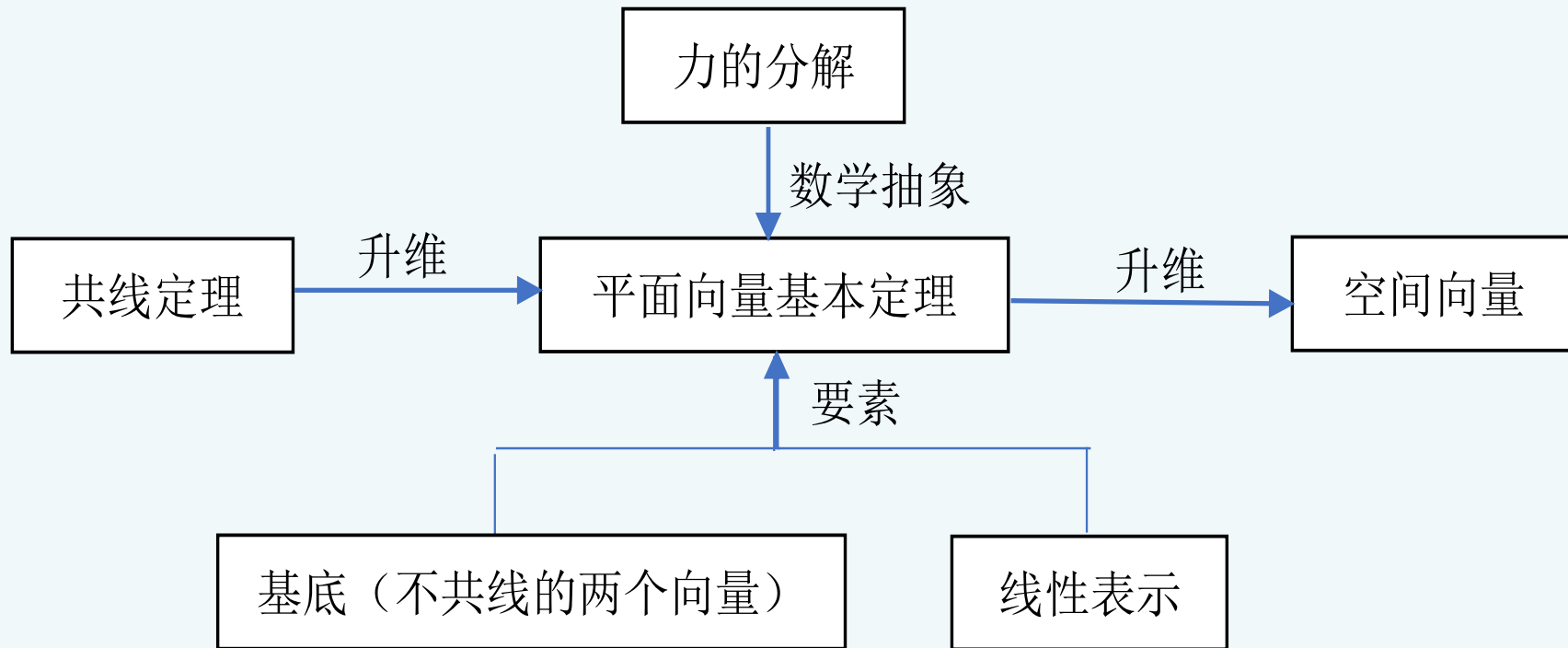
$$\text{所以有 } \overrightarrow{CD}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})^2,$$

$$\text{即 } |\overrightarrow{CD}|^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})^2 = \frac{1}{4}(|\overrightarrow{CA}|^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + |\overrightarrow{CB}|^2)$$

$$\text{因为 } CD = \frac{1}{2}AB, \quad |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + |\overrightarrow{CB}|^2,$$

余弦定理可知 $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2 - 2|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos \angle ACB$ 所以 $4\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$, 得到 $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$.







感谢您的观看

北京市朝阳区教育研究中心 制作