

第 41 课时 平面向量基本定理拓展练习答案

1. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 点 E 是 AB 边上的动点, 则 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CB}$ 的值是 ()

A. 1

B. 2

C. -1

D. -2

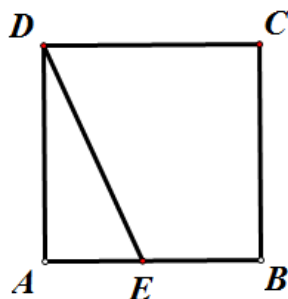
【解析】

各点的位置如图所示, $\because ABCD$ 是边长为 1 的正方形,

$\therefore CB \perp AB, CB \parallel DA,$

$$\therefore \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}^2 + 0 = 1.$$

故选: A.



2. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 M, N 分别在边 BC, CD 上, 且满足 $BC = 3MC$,

$DC = 4NC$, 若 $AB = 4$, $AD = 3$, 则 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MN} = ()$

A. $-\sqrt{7}$

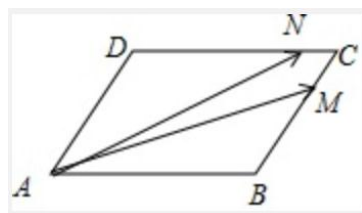
B. 0

C. $\sqrt{7}$

D. 7

【解析】

如图: $BC = 3MC$, $DC = 4NC$, 且 $AB = 4$, $AD = 3$,



$$\text{则 } \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN})$$

$$= \left(\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AB} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{AD} - \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} \right)$$

$$= \frac{1}{3} |\overrightarrow{AD}|^2 - \frac{3}{16} |\overrightarrow{AB}|^2$$

$$= \frac{1}{3} \times 9 - \frac{3}{16} \times 16 = 0.$$

故答案选 B.

3. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, P 为 CD 上一点, 且满足

$\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 则 $|\overrightarrow{AP}|$ 的最小值为 ()

A. $\sqrt{2}$

B. $\frac{4}{3}$

C. 3

D. $\sqrt{3}$

【解析】

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + k(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$$

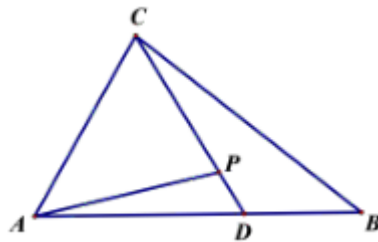
$$= \overrightarrow{AC} + k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{2k}{3}\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \text{ 得到}$$

$$1-k=m, \frac{2k}{3} = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } m = \frac{1}{4}, \text{ 结合}$$

$$\Delta ABC \text{ 的面积为 } 2\sqrt{3}, \text{ 得到 } \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, \text{ 得到 } |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| = 8, \text{ 所以}$$

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{\frac{1}{16}|\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{8} \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \sqrt{1 + \frac{1}{16}|\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{16}{|\overrightarrow{AC}|^2}} \geq \sqrt{3}, \text{ 故选 D.}$$



4. 若 ΔABC 外接圆的半径为 1, 圆心为 O , $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ 且 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AB}|$, 则

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ 等于 ()

A. $\frac{3}{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{3}$

D. 3

【解析】

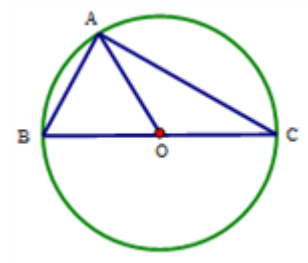
$$\text{因为 } 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}, \text{ 所以 } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC}, \text{ 所以 } O, B, C \text{ 三点共线, 且 } BC \text{ 为直径,}$$

如图所示, 所以 $AB \perp AC$,

$$\text{因为 } |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AB}| = 1, |\overrightarrow{BC}| = 2, |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}, \text{ 所以 } \angle ACB = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{则 } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3, \text{ 故选 D.}$$



5. 设 D, E 分别是 ΔABC 的边 AB, BC 上的点, $AD = \frac{1}{2}AB$, $BE = \frac{2}{3}BC$, 若

$$\overrightarrow{DE} = \lambda_1 \overrightarrow{CB} + \lambda_2 \overrightarrow{CA} \quad (\lambda_1, \lambda_2 \text{ 为实数}), \text{ 则 } \lambda_1 + \lambda_2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【解析】

$$\text{由题, 因为 } AD = \frac{1}{2}AB, BE = \frac{2}{3}BC,$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) - \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA},$$

$$\text{所以 } \lambda_1 = -\frac{1}{6}, \lambda_2 = -\frac{1}{2},$$

$$\text{则 } \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2}{3},$$

$$\text{故答案为: } -\frac{2}{3}$$