# 第41课时平面向量基本定理学习指南

## 一、学习目标

1．借助力的分解理解平面向量基本定理的内容及其价值；

2．了解向量的一组基底的含义，当一组基底选定后，会用这组基底表示其他向量；

3．会运用平面向量基本定理解决简单平面几何问题.

## 二、学法指导

从本质上说，平面向量基本定理与向量的加法是一个事实的两个方面.另外，平面向量基本定理是平面内两向量共线知识的延续，也为进一步学习空间向量分解定理奠定基础，是向量相关理论从“一维”的认知上升到“三维”的认知一个中间环节，是空间向量学习过程中的一个重要的类比基础.

本节课请同学们思考以下几个问题：

（1）平面向量的基本量为什么是两个，而不是一个或者三个或者更多。

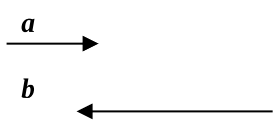
（2）平面向量的基底为什么要不共线？

（3）“对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$ ，有且只有一对实数 $\lambda_1$、$\lambda_2$ ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.”中向量 $\boldsymbol{a}$ 的任意性如何理解？实数 $\lambda_1$、$\lambda_2$ 的存在性和唯一性如何理解？

（4）基底 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 的不唯一性如何理解？ 如何恰当选取基底？

**学习任务一：** 平面向量基本定理的物理背景

问题1：观察向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，指出向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的位置关系；若 $|\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$，用向量 $\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\boldsymbol{b}$.



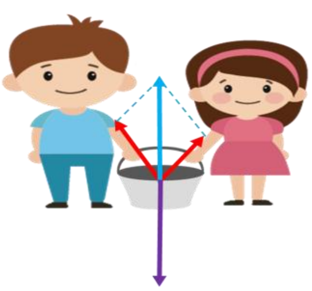

答：平行向量， $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}$.

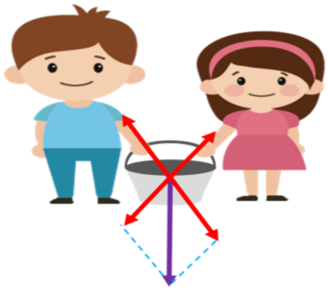
问题2：平面向量的共线定理的内容是什么？

答：向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线 $\Leftrightarrow$ 有唯一的一个实数 $\lambda$，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

问题3：能用向量 $\boldsymbol{a}$ 表示平面内的任意向量 $\boldsymbol{c}$ 吗？那怎么表示平面内任意一个向量呢？能用怎样的几个向量表示？ 你是怎么想到的？


答：不共线的向量不能用一个非零向量表示. 猜想，平面内任一向量能用不共线的两个向量表示. 向量是有丰富的物理背景的.



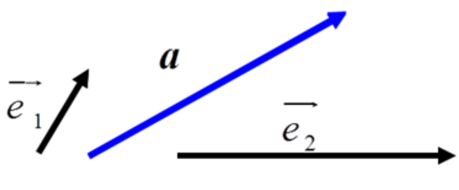


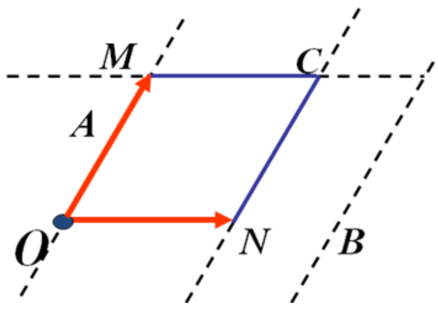
比如：两个人拎着一个篮子，篮子受到两个拉力和重力，其中两个斜向上的拉力可以合成一个力. 我们可以用向量的加法解决力的合成问题. 换个角度看，我们也可以将重力分解两个斜向下的力.

因此，同一个平面内的两个向量可以作加法，反之，平面内任一一个向量也一定能分解成该平面内两个向量的和.

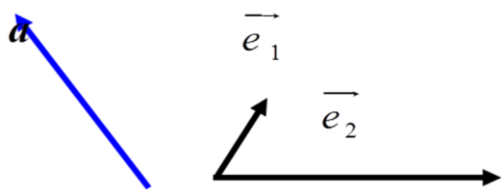
**学习任务二：探究平面向量基本定理的生成**

问题 4：如图，已知不共线的两个向量$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$，及这个平面内的向量$\boldsymbol{a}$，你能用$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$表示向量$\boldsymbol{a}$吗？




问题 5：如图已知不共线的两个向量$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$，及这个平面内的向量$\boldsymbol{a}$，你能用$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$表示向量$\boldsymbol{a}$吗？ 向量$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$能表示该平面内的任意一个向量吗？你能利用信息技术验证你的猜想吗？




答：能表示. 几何画板演示，特殊的，当$\lambda_1$=0时，向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{e}_2$共线，当$\lambda_2$=0时，向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{e}_1$共线，当$\lambda_1$=$\lambda_2$=0时，向量$\boldsymbol{a}$=$\boldsymbol{0}$. 同样$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$也可以叫做这一个平面内所有向量的一组基底.

问题6：:若基底$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$确定，向量$\boldsymbol{a}$确定，$\lambda_1$、$\lambda_2$是否也唯一确定？你能证明你的结论吗？

答：唯一确定.（反证法证明）

**学习任务三：平面向量基本定理及辨析**

**平面向量基本定理：**如果$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$是平面内两个不共线的向量，那么对于这一平面内的任一向量$\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数$\lambda_1$、$\lambda_2$，使$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$. 我们把不共线向量$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$叫做这一平面内所有向量的一组基底.

**概念辨析：**

1. 基底要满足的条件，一是不共线，二基底可以任意选取.

2. 由定理可将任一向量$\boldsymbol{a}$在给出基底$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$的条件下进行分解,基底给定时，分解形式唯一，即$\lambda_1$、$\lambda_2$是由$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$唯一确定的数量.

**学习任务四：平面向量基本定理的应用**

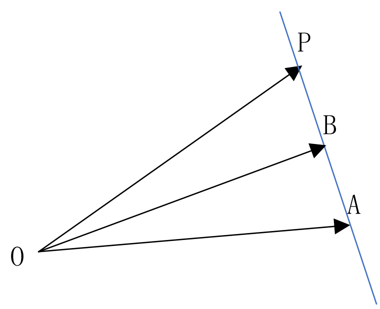
例1　如图，$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$不共线，且$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}\,(t\in R)$，用$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$表示$\overrightarrow{OP}$.

解：$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-t\overrightarrow{OA})$

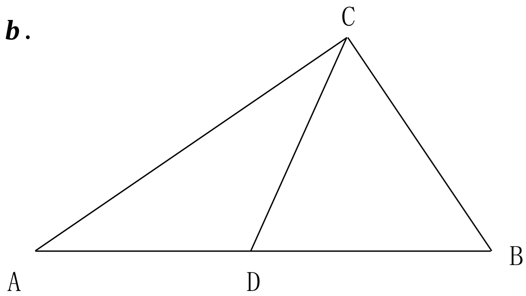
$=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$




追问：观察$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$及$P$、$A$、$B$三点的位置关系，你有什么发现？

答：如果$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，则$P$、$A$、$B$三点共线的充要条件为$m+m=1$.

例 2　如图，$CD$ 是 $\Delta ABC$ 的中线，$CD=\frac{1}{2}AB$，用向量方法证明 $\Delta ABC$ 是直角三角形.




证明一：设 $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}$， $\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{b}$， 则 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

$\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$.

因为 $CD=\frac{1}{2}AB$， 所有 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

因 此 $\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=0$ ， 即 $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$

于是 $\Delta ABC$ 是直角三角形.

证明二：由向量的加法不难得出， $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$，

所以有 $\overrightarrow{CD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})^2$， 即 $\left|\overrightarrow{CD}\right|^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})^2=\frac{1}{4}(\left|\overrightarrow{CA}\right|^2+2\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}+\left|\overrightarrow{CB}\right|^2)$

因为 $CD=\frac{1}{2}AB$， $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{CA}\right|^2+2\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}+\left|\overrightarrow{CB}\right|^2$，余弦定理可知 $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$

**小结提升**