## 函数的性质进一步研究第 20 课时拓展提升任务答案

1. 解：（I） $f(x)=x^2-ax+\ln x,a\in\mathbf{R}$. 定义域为 $(0,+\infty)$

$f'(x)=2x-a+\dfrac{1}{x},a\in\mathbf{R}$.

依题意， $f'(1)=0$.

所以 $f'(1)=3-a=0$，解得 $a=3$.

（II） $a=3$ 时， $f(x)=\ln x+x^2-3x$，定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\dfrac{1}{x}+2x-3=\dfrac{1+2x^2-3x}{x}$，

当 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 或 $x>1$ 时, $f'(x)>0$，

当 $\dfrac{1}{2}<x<1$ 时， $f'(x)<0$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\dfrac{1}{2}),(1,+\infty)$，单调递减区间为 $(\dfrac{1}{2},1)$.

（III）**解法一**：由 $f(x)>0$，得 $a<\dfrac{\ln x+x^2}{x}$ 在 $x>1$ 时恒成立，

令 $g(x)=\dfrac{\ln x+x^2}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{1+x^2-\ln x}{x^2}$

令 $h(x)=1+x^2-\ln x$，则 $h'(x)=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}>0$

所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 为增函数， $h(x)>h(1)=2>0$ .

故 $g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 为增函数. $g(x)>g(1)=1$，

所以 $a\le 1$，即实数 $a$ 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

**解法二**： $f'(x)=\dfrac{1}{x}+2x-a=\dfrac{1+2x^2-ax}{x}$

令 $g(x)=2x^2-ax+1$，则 $\Delta=a^2-8$，

（i）当 $\Delta<0$，即 $-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$ 时， $f'(x)>0$ 恒成立，

因为 $x>1$, 所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$f(x)>f(1)=1-a\geq 0$，即$a\leq 1$，所以$a\in(-2\sqrt{2},1]$；

(ii)当$\Delta=0$，即$a=\pm 2\sqrt{2}$时，$f'(x)\geq 0$恒成立，

因为$x>1,$所以$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

$f(x)>f(1)=1-a\geq 0$，即$a\leq 1$，所以$a=-2\sqrt{2}$；

(iii)当$\Delta>0$，即$a<-2\sqrt{2}$或$a>2\sqrt{2}$时，

方程$g(x)=0$有两个实数根$x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-8}}{4},x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-8}}{4}$

若$a<-2\sqrt{2}$，两个根$x_1<x_2<0$，

当$x>1$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

则$f(x)>f(1)=1-a\geq 0$，即$a\leq 1$，所以$a<-2\sqrt{2}$；

若$a>2\sqrt{2}$，$g(x)=0$的两个根$0<x_1<x_2$，

因为$f(x)=1-a<0$，且$f(x)$在$(1,+\infty)$是连续不断的函数，

所以总存在$x_0>1$，使得$f(x_0)<0$，不满足题意.

综上，实数$a$的取值范围为$(-\infty,1]$.

**2** 设函数$f(x)=e^x-ax$，$x\in R$.

（Ⅰ）当$a=2$时，求曲线$f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

（Ⅱ）在（Ⅰ）的条件下，求证：$f(x)>0$；

（Ⅲ）当$a>1$时，求函数$f(x)$在$[0,a]$上的最大值.

解：（Ⅰ）当$a=2$时，$f(x)=e^x-2x$，$f(0)=1$，

所以$f'(x)=e^x-2$.

因为$f'(0)=e^0-2=-1$，即切线的斜率为$-1$，

所以切线方程为$y-1=-(x-0)$，即$x+y-1=0$.

（Ⅱ）证明：由（Ⅰ）知$f'(x)=e^x-2$.

令 $f'(x)=0$，则 $x_0=\ln 2$.

当 $x\in(-\infty,\ln 2)$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减，

当 $x\in(\ln 2,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x=\ln 2$ 时，函数最小值是 $f(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2>0$.

命题得证.

（III）因为 $f(x)=e^x-ax$，所以 $f'(x)=e^x-a$.

令 $f'(x)=0$，则 $x=\ln a>0$.

当 $a>1$ 时，设 $M(a)=a-\ln a$，因为 $M'(a)=1-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-1}{a}>0$，

所以 $M(a)=a-\ln a$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且 $M(1)=1-\ln 1=1$，

所以 $M(a)=a-\ln a>0$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立，即 $a>\ln a$.

所以当 $x\in(0,\ln a)$， $f'(x)<0$， $f(x)$ 在 $(0,\ln a)$ 上单调递减；

当 $x\in(\ln a,a)$， $f'(x)>0$， $f(x)$ 在 $(\ln a,a)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上的最大值等于 $\max\{f(0),f(a)\}$，

因为 $f(0)=e^0-a\cdot 0=1$， $f(a)=e^a-a^2$，

不妨设 $h(a)=f(a)-f(0)=e^a-a^2-1(a>1)$，

所以 $h'(a)=e^a-2a$.

由（II）知 $h'(a)=e^a-2a>0$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立，

所以 $h(a)=f(a)-f(0)=e^a-a^2-1$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $h(1)=e^1-1^2-1=e-2>0$，

所以 $h(a)=f(a)-f(0)=e^a-a^2-1>0$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立，即 $f(a)>f(0)$.

所以当 $a>1$ 时， $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上的最大值为 $f(a)=e^a-a^2$.