

函数的性质进一步研究第 20 课时—课后作业答案

1 已知函数 $f(x) = x \sin x - \frac{3}{2}$. 求 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上的零点个数.

解: 由 $f(x) = x \sin x - \frac{3}{2}$. 所以 $f'(x) = \sin x + x \cos x$.

设 $g(x) = \sin x + x \cos x$, 可得 $g'(x) = -x \sin x$.

所以 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ $g'(x) < 0$, $g(x)$ 递减.

$$g(\frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 1 > 0, \quad g(\pi) = \sin \pi + \pi \cos \pi = -\pi < 0$$

所以存在唯一 $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 使 $g(x_0) = 0$ 即 $g'(x_0) = 0$.

所以 $x \in (\frac{\pi}{2}, x_0)$ 时, $g(x) > 0$ 即 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 递增.

所以 $x \in (x_0, \pi)$ 时, $g(x) < 0$ 即 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 递减.

$$\text{又 } f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} = \frac{\pi-3}{2} > 0, \text{ 所以 } f(x_0) = x_0 \sin x_0 - \frac{3}{2} > 0.$$

$$\text{又 } f(\pi) = \pi \sin \pi - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} < 0, \text{ 所以 } f(x) \text{ 在 } (\frac{\pi}{2}, \pi) \text{ 上有且只有一个零点.}$$

2. 已知函数 $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的零点及单调区间;

(II) 求证: 曲线 $y = \frac{\ln x}{x}$ 存在斜率为 6 的切线, 且切点的纵坐标 $y_0 < -1$.

解: (I) 令 $f(x) = 0$, 得 $x = e$.

故 $f(x)$ 的零点为 e .

$$f'(x) = \frac{(-\frac{1}{x}) \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (x > 0).$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = e^{\frac{3}{2}}$.

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

$f(x)$	$(0, e^{\frac{3}{2}})$	$e^{\frac{3}{2}}$	$(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, e^{\frac{3}{2}})$ ，单调递增区间为 $(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$ 。

$$(II) \text{ 令 } g(x) = \frac{\ln x}{x}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = f(x).$$

$$\text{因为 } f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 + 4\ln 2 > 4 + 4 \times \frac{1}{2} = 6, \quad f(e) = 0, \text{ 且由 (I) 得, } f(x)$$

在 $(0, e)$ 内是减函数,

$$\text{所以 存在唯一的 } x_0 \in \left(\frac{1}{2}, e\right), \text{ 使得 } g'(x_0) = f(x_0) = 6.$$

$$\text{当 } x \in [e, +\infty) \text{ 时, } f(x) \leq 0.$$

$$\text{所以 曲线 } y = \frac{\ln x}{x} \text{ 存在以 } (x_0, g(x_0)) \text{ 为切点, 斜率为 } 6 \text{ 的切线.}$$

$$\text{由 } g'(x_0) = \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} = 6 \text{ 得: } \ln x_0 = 1 - 6x_0^2.$$

$$\text{所以 } g(x_0) = \frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{1 - 6x_0^2}{x_0} = \frac{1}{x_0} - 6x_0.$$

$$\text{因为 } x_0 > \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{x_0} < 2, \quad -6x_0 < -3.$$

$$\text{所以 } y_0 = g(x_0) < -1.$$