函数的性质进一步研究第20课时—学习指南

【学习目标】

1．利用“二次求导”解决导函数正负问题；

2．学会构造函数；

3．提升分析探究转化问题的能力，培养理性精神．

【学习任务单】

一、知识梳理

1．函数正负相关的因素

（1） 函数的单调性；

（2）特殊点函数值的正负。

二、例题讲解

例1 证明：当 $x>0$时$,x^2<e^x.$

分析：证明 $x>0$时$,x^2<e^x$.转化成证明 $x>0$时$,e^x-x^2>0.$

解：由 $g(x)=e^x-x^2(x>0),$ 所以 $g'(x)=e^x-2x.$

设 $h(x)=e^x-2x,$ 所以$h'(x)=e^x-2.$

令$h'(x)=e^x-2=0,$ $x=\ln 2.$

$x\in(0,\ln 2)$

$h'(x)<0,h(x)$递减，

$x\in(\ln 2,+\infty)$

$h'(x)>0,h(x)$递增.

可得$h(x)_{\min}=h(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2=2(1-\ln 2)>0.$

所以$x\in(0,+\infty)$时，$h(x)>0$即$g'(x)>0$，所以$g(x)$递增，

所以$x\in(0,+\infty)$时，$g(x)>g(0)=1$，所以$g(x)>0$恒成立.

所以 $e^x-x^2>0$即$x^2<e^x$.

例 2　已知函数$f(x)=e^x-a\ln x-a$. 证明：$\forall a\in(0,e)$, $f(x)$在区间$(\frac{a}{e},1)$上有极小值.

解: 由 $f(x)=e^x-a\ln x-a$. 所以 $f'(x)=e^x-\frac{a}{x}$.

设$h(x)=e^x-\frac{a}{x}$，　可得$h'(x)=e^x+\frac{a}{x^2}>0$.

所以$x\in(\frac{a}{e},1)$ $h'(x)>0$, $h(x)$递增.

又可得$h(\frac{a}{e})=e^{\frac{a}{e}}-e<0$, $h(1)=e-a>0$,

所以存在唯一　$x_0\in(\frac{a}{e},1)$，使 $h(x_0)=0$.

所以 $x\in(\frac{a}{e},x_0)$时，　$h(x)<0$即$f'(x)<0$，所以 $f(x)$递减，

所以 $x\in(x_0,1)$时，　$h(x)>0$即$f'(x)>0$，所以 $f(x)$递增.

所以$f(x)$在$(\frac{a}{e},1)$存在极小值$f(x_0)=e^{x_0}-a\ln x_0-a$.

归纳小结：

1．主要讲了把导函数构造成一个新的函数，再去探讨它的正负问；

2．与函数的正负有关的因素　（1）函数图象的单调性，（2）特殊点的函数值的正负.