

高二年级数学第 45 课时函数的性质进一步研究第 19 课时拓展提升任务答案

【解】 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1 - ax^2 e^x}{x}$.

记 $g(x) = 1 - ax^2 e^x$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty) \searrow$.

因为 $g(1) = 1 - ae > 0$, $g(\ln \frac{1}{a}) = 1 - (\ln \frac{1}{a})^2 < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 存在唯一零点 $x_0 \in (1, \ln \frac{1}{a})$, 且 $f'(x_0) = 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0) \nearrow$, 在 $(x_0, +\infty) \searrow$.

而 $f(1) = 0$, 故 $f(x_0) > 0$, 而 $f(\ln \frac{1}{a}) = \ln(\ln \frac{1}{a}) - \ln \frac{1}{a} + 1$.

可证 $\ln x \leq x - 1$, 当且仅当 $x = 1$ 时取 “=”.

因为 $0 < a < \frac{1}{e}$, 所以 $\ln \frac{1}{a} > 1$. 故当 $x = \ln \frac{1}{a} > 1$ 时, $\ln(\ln \frac{1}{a}) < \ln \frac{1}{a} - 1$, 从而 $f(\ln \frac{1}{a}) < 0$.

此时 $f(x)$ 在 $(x_0, \ln \frac{1}{a})$ 上存在一个零点.

综上, 函数 $f(x)$ 恰有两个零点.