

函数的性质进一步研究第 18 课时课后作业答案

1. $a > -\frac{1}{9}$

2. $-1 < a < 0$ 或 $0 < a < 2$.

3 解: (1) 由 $f(x) = x \ln x$, 可得 $f'(x) = \ln x + 1$,

当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

所以函数 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上单调递增.

又 $f(1) = \ln 1 = 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上的最小值为 0.

(2) 由题意知, $2x \ln x \geq -x^2 + ax - 3$, 则 $a \leq 2 \ln x + x + \frac{3}{x}$.

若存在 $x \in [\frac{1}{e}, e]$ 使不等式 $2f(x) \geq -x^2 + ax - 3$ 成立,

只需 a 小于或等于 $2 \ln x + x + \frac{3}{x}$ 的最大值.

设 $h(x) = 2 \ln x + x + \frac{3}{x} (x > 0)$, 则 $h'(x) = \frac{2}{x} + 1 - \frac{3}{x^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{x^2}$.

当 $x \in [\frac{1}{e}, 1)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, e]$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增.

由 $h(\frac{1}{e}) = -2 + \frac{1}{e} + 3e$, $h(e) = 2 + e + \frac{3}{e}$, $h(\frac{1}{e}) - h(e) = 2e - \frac{2}{e} - 4 > 0$,

可得 $h(\frac{1}{e}) > h(e)$.

所以, 当 $x \in [\frac{1}{e}, e]$ 时, $h(x)$ 的最大值为 $h(\frac{1}{e}) = -2 + \frac{1}{e} + 3e$.

故 $a \leq -2 + \frac{1}{e} + 3e$.

4.解 (1)因为 $f(x)=\ln x-ax+\frac{1-a}{x}-1$,

$$\text{所以 } f'(x)=\frac{1}{x}-a+\frac{a-1}{x^2}=-\frac{ax^2-x+1-a}{x^2},$$

$x \in (0, +\infty)$. 令 $h(x)=ax^2-x+1-a$, $x \in (0, +\infty)$.

(i) 当 $a=0$ 时, $h(x)=-x+1$, $x \in (0, +\infty)$,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $h(x)>0$, 此时 $f'(x)<0$, 函数 $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h(x)<0$, 此时 $f'(x)>0$, 函数 $f(x)$ 单调递增.

(ii) 当 $a \neq 0$ 时, 由 $f'(x)=0$, 即 $ax^2-x+1-a=0$,

$$\text{解得 } x_1=1, x_2=\frac{1}{a}-1.$$

① 当 $a=\frac{1}{2}$ 时, $x_1=x_2$, $h(x) \geq 0$ 恒成立,

此时 $f'(x) \leq 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

② 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1}{a}-1 > 1 > 0$,

$x \in (0, 1)$ 时, $h(x) > 0$, 此时 $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

$x \in (1, \frac{1}{a}-1)$ 时, $h(x) < 0$, 此时 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

$x \in (\frac{1}{a}-1, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$, 此时 $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减.

③ 当 $a < 0$ 时, 由于 $\frac{1}{a}-1 < 0 < 1$, $x \in (0, 1)$ 时, $h(x) > 0$

此时 $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减; $x \in (1, +\infty)$ 时, $h(x) < 0$, 此时 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时,

函数 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减, 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a=\frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减; 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减,

在 $(1, \frac{1}{a}-1)$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{a}-1, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 因为 $a=\frac{1}{4} \in (0, \frac{1}{2})$, 由(1), 知 $x_1=1$, $x_2=3 \notin (0, 2)$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$

单调递减; 当 $x \in (1, 2)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上的最小值为 $f(1)=-\frac{1}{2}$.

由于“对任意 $x_1 \in (0, 2)$, 存在 $x_2 \in [1, 2]$, 使 $f(x_1) \geq g(x_2)$ ”

等价于“ $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最小值不大于 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上的最小值 $-\frac{1}{2}$ ”，(*)

又 $g(x)=(x-b)^2+4-b^2$, $x\in[1, 2]$, 所以

①当 $b<1$ 时, 因为 $g(x)_{\min}=g(1)=5-2b>0$, 此时与(*)矛盾;

②当 $b\in[1, 2]$ 时, 因为 $g(x)_{\min}=g(b)=4-b^2\geq 0$, 同样与(*)矛盾;

③当 $b\in(2, +\infty)$ 时, 因为 $g(x)_{\min}=g(2)=8-4b$,

解不等式 $8-4b\leq -\frac{1}{2}$, 可得 $b\geq \frac{17}{8}$.

综上, 可得 b 的取值范围是 $\left[\frac{17}{8}, +\infty\right)$.