

函数的性质进一步研究第 18 课时课后作业

1. 设 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2ax$. 若 $f(x)$ 在 $(\frac{2}{3}, +\infty)$ 上存在单调递增区间, 则实数 a 的取值范围是_____.

2. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + 2a^2x + 2$. 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 2)$ 上不单调, 则实数 a 的取值范围是_____.

3. 已知函数 $f(x) = x \ln x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上的最小值;

(2) 若存在 $x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$ (e 为自然对数的底数, 且 $e = 2.71828\cdots$) 使不等式

$2f(x) \geq -x^2 + ax - 3$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

4. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + \frac{1-a}{x} - 1$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $g(x) = x^2 - 2bx + 4$, 当 $a = \frac{1}{4}$ 时, 若对任意 $x_1 \in (0, 2)$, 存在 $x_2 \in [1, 2]$, 使 $f(x_1) > g(x_2)$, 求实数 b 的取值范围.