# 函数的性质进一步研究第 18 课时学习指南

**【学习目标】**

1. 通过问题 1 的解决，知道恒成立问题与存在性成立问题的区别与联系；
2. 通过问题 2 的探究，掌握求解存在性成立问题的一般方法；
3. 在应用导数解决函数问题的过程中，提升逻辑推理、数学运算等核心素养.

**【学法指导】**

利用导数研究函数问题，确定函数的单调性是关键，求函数的最大值（最小值）是落脚点。如函数中的恒成立问题、不等式的证明等很多问题，最后都转化为求函数的最大值（最小值）问题。其中，如何转化需要我们细心体会与积累。这一节，我们通过解决几个“存在性”问题，再现这一解决问题的方法，希望大家进一步加深理解。

**【教学过程】**

【问题 1】简单的存在性成立问题

引例（上一节例 2）：已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=(-x^2+ax)e^x$ ($x\in\mathbf{R}$，e 为自然对数的底数)，若函数 $f(x)$ 在(－1,1)上单调递增，求 $a$ 的取值范围.

例 1.已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=(-x^2+ax)\mathrm{e}^x$ ($x\in\mathbf{R}$，e 为自然对数的底数)，若函数 $f(x)$ 在(－1,1)上存在单调减区间，求 $a$ 的取值范围.

【归纳小结】存在性问题和恒成立问题的区别与联系

存在性问题和恒成立问题都可以转化为函数的最大值（最小值）问题，但它们是有区别的。主要结论如下：

若 $g(x)\le m$ 恒成立，则 $g(x)_{\max}\le m$；若 $g(x)\ge m$ 恒成立，则 $g(x)_{\min}\ge m$；

若 $g(x)\le m$ 有解，则 $g(x)_{\min}\le m$；若 $g(x)\ge m$ 有解，则 $g(x)_{\max}\ge m$.

【问题 2】双变量存在性成立问题

例 2.已知函数 $f(x)=a\ln x-x+2$，其中 $a\neq 0$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若对任意的 $x_1\in[1,\mathrm{e}]$，总存在 $x_2\in[1,\mathrm{e}]$，使得 $f(x_1)+f(x_2)=4$，求实数 $a$ 值.

例 3. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2-(2a+1)x+2\ln x\ \ (a\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的单调区间；

(Ⅱ)设 $g(x)=x^2-2x$，若对任意 $x_1\in(0,2]$，均存在 $x_2\in(0,2]$，使得 $f(x_1)<g(x_2)$，求 $a$ 的取值范围.

【归纳小结】

解决双变量存在性成立问题的核心是正确理解题意，然后转化为函数的最大值与最小值的问题。常见情形如下：

（1） $\forall x_1\in[a,b],\exists x_2\in[a,b]$,使得 $f(x_1)>g(x_2)$ 成立 $\Longleftrightarrow$ $f(x)_{min}>g(x)_{m}$;

（2） $\exists x_1\in[a,b],\forall x_2\in[a,b]$,使得 $f(x_1)>g(x_2)$ 成立 $\Longleftrightarrow$ $f(x)_{max}>g(x)_{m}$;

（3） $\exists x_1\in[a,b],\exists x_2\in[a,b]$,使得 $f(x_1)>g(x_2)$ 成立 $\Longleftrightarrow$ $f(x)_{max}>g(x)_{m}$.