函数的性质进一步研究第 17 课时课后作业答案

1．若函数 $f(x)=kx-\ln x$ 在区间（1，$+\infty$）单调递增，则 k 的取值范围是

（A）$\left(-\infty,-2\right]$　　（B）$\left(-\infty,-1\right]$　　（C）$\left[2,+\infty\right)$　　（D）$\left[1,+\infty\right)$

答案 D

2. 已知函数 $f(x)=ax^3-x^2+x-5$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调递增函数，a 的取值范围是_______.

答案：$[\frac{1}{3},+\infty)$

解：$f'(x)=3ax^2-2x+1$，因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以，$f'(x)\ge 0$，即：$3ax^2-2x+1\ge 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，即：$\begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}$，所以，$\begin{cases}a>0\\ 4-12a<0\end{cases}$　所以 $a\ge\frac{1}{3}$。

3. 证明：当 $a>\ln 2-1$ 且 $x>0$ 时，$e^x>x^2-2ax+1$.

证明：设 $f(x)=e^x-x^2+2ax-1\quad(x>0)$

设 $g(x)=f'(x)=e^x-2x+2a$，

则 $g'(x)=e^x-2$，

$x\in(0,\ln 2)$ 时，$g'(x)<0$，$f'(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上单调递减，

$x\in(\ln 2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$f'(x)$ 在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增，

故 $f'(x)_{\min}=f'(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2+2a=2(1-\ln 2+a)$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)>f(0)=0$，

即当 $a>\ln 2-1$ 且 $x>0$ 时，$e^x>x^2-2ax+1$.

4.已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln x.$ 求证：在 $(1,+\infty)$ 上，函数 $f(x)$ 的图象在函数 $g(x)=\frac{2}{3}x^3$ 的图象的下方；

分析：函数 $f(x)$ 的图象在函数 $g(x)$ 的图象的下方 $\Leftrightarrow$ 不等式 $f(x)<g(x)$，

即 $\frac{1}{2}x^2+\ln x<\frac{2}{3}x^3$，只需证明在 $(1,+\infty)$ 上，恒有 $\frac{1}{2}x^2+\ln x<\frac{2}{3}x^3$ 成立.

设 $F(x)=g(x)-f(x)$，$x\in(1,+\infty)$，考虑到 $F(1)=\frac{1}{6}>0$，

要证不等式转化为：当 $x>1$ 时，$F(x)>F(1)$，这只需证明：$g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

解：设 $F(x)=g(x)-f(x)$，即 $F(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\ln x$，

则 $F'(x)=2x^2-x-\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x}$

当 $x>1$ 时，$F'(x)=\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x}>0$，

从而 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore F(x)>F(1)=\frac{1}{6}>0$

$\therefore$ 当 $x>1$ 时，$g(x)-f(x)>0$，即 $f(x)<g(x)$，

故在 $(1,+\infty)$ 上，函数 $f(x)$ 的图象在函数 $g(x)=\frac{2}{3}x^3$ 的图象的下方.