

函数的性质进一步研究第 17 课时

【学习目标】

1. 了解利用导数证明不等式是导数的主要应用之一。
2. 通过 3 个例题，充分体验、感受构造新函数转化证明不等式的过程，掌握通过研究目标函数的单调性或最值来解决不等式的证明方法。
3. 应用导数的方法来研究函数中的不等式问题，培养数学转化能力，养成勤于思考的习惯，提升逻辑推理和数学运算核心素养。

【学法指导】

首先将不等式恒成立与存在性问题进行转化，利用导数证明不等式的基本方法是构造辅助函数，把不等式的证明转化为利用导数研究函数的单调性或最值，从而证得不等式。

【学习内容】

【任务一】

回顾转化不等式问题基本方法

1. 证明 $f(x) \geq g(x)$ 或 $f(x) \leq g(x)$ ，可通过构造函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ ，将上述不等式转化为求证 $h(x) \geq 0$ 或 $h(x) \leq 0$ ，从而利用求 $h(x)$ 的最小值或最大值来证明不等式。

2. 关于恒成立问题可以转化为求函数的最值。一般地，

$f(x) \geq a$ 恒成立，只需 $f(x)_{\min} \geq a$ 即可；

$f(x) \leq a$ 恒成立，只需 $f(x)_{\max} \leq a$ 即可。

3. 不等式的恒成立与存在性问题

(1) $f(x) > g(x)$ 对一切 $x \in I$ 恒成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\min} > 0 (x \in I)$.

(2) $f(x) > g(x)$ 存在 $x \in I$ 能成立 $\Leftrightarrow [f(x) - g(x)]_{\max} > 0 (x \in I)$.

(3) 对 $\forall x_1, x_2 \in I$ 使得 $f(x_1) \leq g(x_2) \Leftrightarrow f(x)_{\max} \leq g(x)_{\min}$.

(4) 对 $\forall x_1 \in I_1, \exists x_2 \in I_2$ 使得 $f(x_1) \geq g(x_2) \Leftrightarrow f(x)_{\min} \geq g(x)_{\min}$

【任务二】例题分析与讲解

例 1. 证明： $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$

例 2. 设函数 $f(x)=1-e^{-x}$ ，证明：当 $x>-1$ 时， $f(x)\geq\frac{x}{x+1}$.

例 3. 函数 $g(x)=x\ln x+x$ ，求证：当 $k\leq 3$ ， $g(x)>k(x-1)$ 对任意 $x>1$ 恒成立.

【任务三】归纳小结

1. 注意分离参数法不是万能的，如果分离参数后，得出的函数解析式较为复杂，性质很难研究，就慎用分离参数法.
2. 利用导数证明不等式的基本步骤
 - (1)作差或变形，
 - (2)构造新的函数 $h(x)$ ，
 - (3)利用导数研究 $h(x)$ 的单调性或最值，
 - (4)根据单调性及最值，得到所证不等式.
3. 导数在综合应用中转化与化归思想的常见类型
 - (1)把不等式恒成立问题转化为求函数的最值问题；
 - (2)把证明不等式问题转化为函数的单调性问题；
 - (3)把方程解的问题转化为函数的零点问题.