

第 40 课时 向量的数量积 (2) 拓展练习参考答案

1. 在边长为 2 的正 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} =$ _____.

【答案】 -2

【解析】依题意, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\pi - B) = 2 \times 2 \times \cos 120^\circ = -2$.

2. 若向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 120° , 则 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】依题意, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 + 1 \times 1 \times \cos 120^\circ = \frac{1}{2}$.

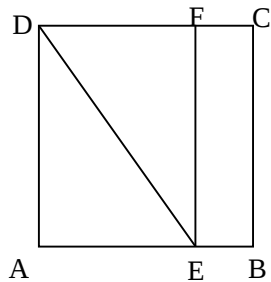
3. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 点 E 是 AB 边上的动点, 则 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC}$ 的最大值为 _____.

【答案】 1

【解析】(一) 基底法

考虑到 $AD \perp AB$, 故 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. 如果我们把 $\overrightarrow{AD}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 作为一组基底,

则 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AE}| \leq 1$.



(二) 定义法

依据平面向量数量积的定义, $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = |\overrightarrow{DE}| \cos \angle CDE$.

作 $EF \perp CD$, 垂足为 F (如图), 则 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = |\overrightarrow{DF}| \leq 1$.

4. 关于平面向量有下列四个命题: ①若 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, 则 $\mathbf{b} = \mathbf{c}$; ②非零向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 满足

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 的夹角为 30° ; ③ $(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}) \cdot (\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} - \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}) = 0$.

其中正确的命题为 _____ (写出所有正确命题的序号)

【答案】 ②③

【解析】①错误. 详见“学习指南【问题五】”; ②正确. 设 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, 则由 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ 可知, $\triangle OAB$ 是正三角形, 从而易知 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 的夹角为 30° ; ③正确. 因为

$$(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}) \cdot (\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} - \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}) = \left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right)^2 - \left(\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right)^2 = 1 - 1 = 0.$$

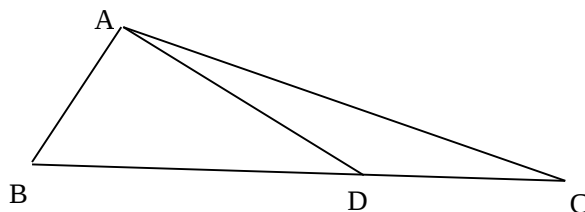
5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp AB$ ， $\overrightarrow{BC} = \sqrt{3}\overrightarrow{BD}$ ， $|\overrightarrow{AD}| = 1$ ，则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} =$ _____

【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 依题意， $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AD}$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= \sqrt{3}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AD} = \sqrt{3}|\overrightarrow{BD}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cos \angle ADB = \sqrt{3}|\overrightarrow{AD}|^2 = \sqrt{3}.$$



6. 若 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$ ， $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 120° ，当 $x =$ _____ 时， $|\mathbf{a} - x\mathbf{b}|$ 最小，其最小值是 _____

【答案】 $-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】 设 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ ， $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ ，则

$|\mathbf{a} - x\mathbf{b}|$ 即为点 A 与直线 OB 上某点 P 连线的距离，

如图可知，当点 P 运动到 C 点时， $|\mathbf{a} - x\mathbf{b}|$ 最小，

为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，此时 $x = -\frac{1}{2}$ 。

